La sezione aurea e le piramidi egizie

Corrado Mascia

13 ottobre 2018

Si dice che i sacerdoti egizi abbiano riferito ad Erodoto[1] che le dimensioni della Piramide di Cheope siano state scelte facendo in modo che l'area di ogni faccia coincidesse con il quadrato dell'altezza. Quanto è restrittiva questa richiesta? Quali condizioni impone sulla forma geometrica della piramide? È stata effettivamente rispettata la condizione richiesta?

Piramidi in geometria e piramidi in Egitto. In geometria, si definisce *piramide* un poliedro individuato da una faccia poligonale chiamata *base* e da un punto detto *apice* (o *vertice*) che non giace sul piano della base. Gli *spigoli* della piramide sono i lati del poligono di base e i segmenti delimitati dall'apice e da ciascuno dei vertici della base stessa. Infine, si chiamano *facce* della piramide la sua base e le facce triangolari, dette *facce laterali*, che hanno come vertice il suo apice.

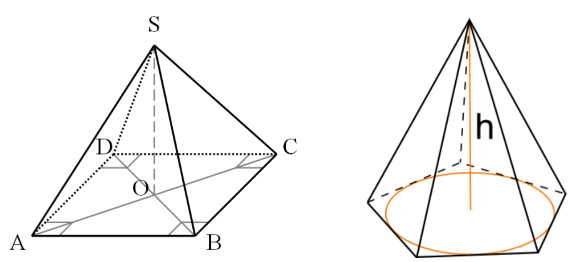

Figura 1: A sinistra, una piramide a base quadrata; a destra, una piramide a base pentagonale.

La tipologia costruttiva dell'Antico Egitto si basa sulla scelta di una piramide di base quadrata[2] e facce laterali uguali. Questo riduce drasticamente

[1]Storico greco, nato ad Alicarnasso nel 484 a.C. e morto a Thuri dopo il 430 a.C., ritenuto da Cicerone il *padre della storia*.

[2]A dirla tutta, esistono anche casi di piramidi con base di forma rettangolare, tra cui la

le strutture compatibili restringendo il numero di parametri liberi a due. Tali parametri possono essere scelti in maniere diverse. Qui, scegliamo la lunghezza del lato della base $2b$ e la misura h dell'altezza.[3]

Per prima cosa, cerchiamo di capire quanti vincoli impone tale condizione sul progetto della piramide stessa. A spanne, possiamo intuire che:

1. due parametri liberi corrispondono a due gradi di libertà nella scelta costruttiva;

2. l'imposizione di un vincolo aggiuntivo (il legame tra area della faccia laterale e quadrato dell'altezza) lascia un solo parametro libero di muoversi a suo piacimento.

Nello specifico, si può interpretare il parametro rimanente come una scala, collegata alla grandezza della struttura stessa. In particolare, la struttura non sarà individuata univocamente.

Precisamente, i conti. Indichiamo con a la lunghezza della distanza tra il lato della base e l'apice della piramide[4]. Terzo parametro che, di conseguenza, deve essere collegato tramite qualche identità ai due precedenti. Questa è fornita dal Teorema di Pitagora (...perché?) e, per la precisione, è data da

$$h^2 + b^2 = a^2.$$

A questa (indispensabile) condizione, va aggiunta la (stravagante) richiesta dei sacerdoti che, tradotta in formule matematiche, prende la forma

$$h^2 = \frac{1}{2}(a \cdot 2b).$$

Quindi, ci sono quindi due relazioni da verificare

$$h^2 + b^2 = a^2 \qquad \text{AND} \qquad h^2 = a \cdot b.$$

Piramide a gradoni di Djoser (altezza 62 metri, base 109×125 metri), che qui non saranno considerate.

[3]Equivalentemente, potrebbero essere fatte scelte diverse. Ad esempio, si potrebbe decidere di sostituire l'altezza h o la base $2b$ con l'angolo α formato dall'inclinazione della piramide al posto dell'altezza, utilizzando la relazione $h = b \tan \alpha$.

[4]Incidentalmente, si osservi che, dato che l'apice non e' nel piano della base, tale distanza è strettamente positiva.

Esplicitando, si ottiene la relazione $a\,b + b^2 = a^2$, da cui, dividendo per b^2

$$x + 1 = x^2$$

dove x è dato dal rapporto a/b. Quindi, l'incognita x deve essere una radice del polinomio di secondo grado

$$p(x) = x^2 - x - 1$$

e, più precisamente, deve essere la radice positiva di tale polinomio.

Risolvendo l'equazione con la formula nota, si trova

$$p(x) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = x_\pm := \tfrac{1}{2}(1 \pm \sqrt{1+4}) = \tfrac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$$

Di queste due radici x_- e x_+, la prima è negativa e la seconda è positiva.

L'apparizione della sezione aurea. Il valore x, corrispondente al rapporto tra la distanza a tra l'apice e il lato di base e la distanza b del lato di base dall'asse centrale della piramide, è dato dalla *sezione aurea*[5] ϕ, cioè

$$x_+ = \phi := \tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) = 1.618033988749895...$$

Per rispondere alla terza domanda, cioè se gli ingegneri egizi siano riusciti a soddisfare tale condizione, bisogna munirsi di righello e andare sul posto a misurare i dati dal vero... Non potendolo fare, per evidenti motivi, possiamo provare ad avvalerci di qualche libro[6]. Da qui, si evince che[7]

$$h = 146.71m, \qquad b = 115.21m, \qquad a = 186.54m$$

e dunque il rapporto effettivo x_{eff} è dato da

$$x_{\text{eff}} = \frac{a_{\text{eff}}}{b_{\text{eff}}} = 1.6191...$$

[5] In inglese, *golden ratio*.

[6] I dati riportati qui sono presi da David M. Burton, *The History of Mathematics. An Introduction*, 7th edition, McGraw Hill, p.59, usando il fattore di conversione $1m = 3.28ft$.

[7] Nel corso degli anni, per via dell'erosione dovuta al tempo, l'altezza della piramide è diminuita e, attualmente a credere a `Wikipedia`, pare che si aggiri attorno ai 139 metri.

Confrontando con la sezione aurea ϕ si trova un errore relativo di

$$\frac{x_{\text{eff}} - \phi}{\phi} = \frac{1.6191... - 1.6180...}{1.6180...} \approx 6.8 \times 10^{-4}.$$

Dunque, i due numeri non coincidono, ma, comunque, l'errore commesso è assolutamente accettabile.

In conclusione. Ecco, dunque, la risposta alle tre domande di inizio sezione.

1. Quanto è restrittiva questa richiesta?
La condizione può essere soddisfatta. Resta comunque un parametro di libertà associabile alla scala dell'oggetto.

2. Quali condizioni impone sulla forma geometrica della piramide?
Il rapporto tra l'altezza a della faccia laterale diviso per la distanza b del lato di base dall'asse centrale deve essere dato dalla sezione aurea ϕ.

3. È stata effettivamente rispettata la condizione richiesta?
Non in maniera esatta, ma solo approssimativamente. E con un errore inferiore ad un millesimo... Sapreste forse fare di meglio? Io no.

Tutto inventato? Questa storia è, probabilmente, solo il frutto di una cattiva interpretazione da parte di John Taylor nel suo libro "The Great Pyramid: Why was it built? And who built it?" in cui l'autore si è concesso più di qualche libertà nella traduzione del testo originale le "Storie" di Erodoto (paragrafo 124 del II libro, chiamato *Euterpe*). Quindi, la sezione aurea sarebbe piuttosto di origine greca che egizia.