PROGRAMMAZIONE LINEARE IN DUE VARIABILI

La **ricerca operativa** nata durante la seconda guerra mondiale ed utilizzata in ambito militare, oggi viene applicata all'industria, nel settore pubblico e nell'economia, si occupa della risoluzione di problemi che richiedono una scelta e cerca di determinarne la soluzione ottimale.
La ricerca operativa trasforma i problemi reali in problemi matematici e usa gli strumenti della matematica per risolverli.
La programmazione lineare è uno dei metodi utilizzati per risolvere problemi di scelta.

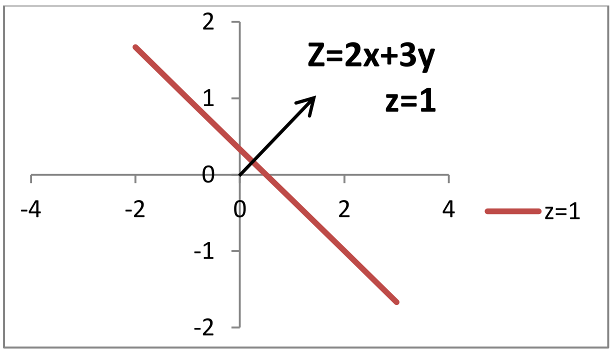
Si è in presenza di un problema di programmazione lineare in due variabili quando, il problema si traduce in un modello matematico costituito da:

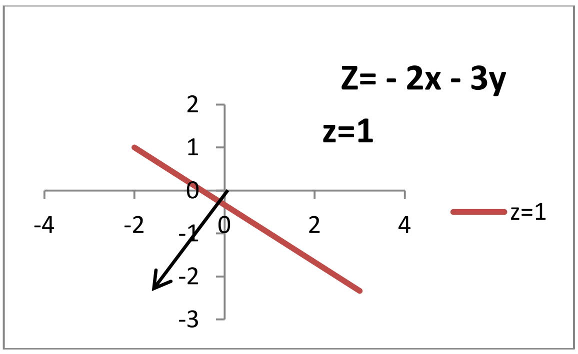
a. una funzione obiettivo, lineare in *2* variabili (le variabili hanno tutte esponente uno) dette **variabili di decisione**, che normalmente esprime un costo (da minimizzare) oppure un ricavo o un guadagno (da massimizzare);
b. un sistema di vincoli, espressi da equazioni o disequazioni lineari nelle *2* variabili (cioè di primo grado): sono detti anche *vincoli tecnologici*;
c. un sistema di vincoli di segno, che esprimono la non-negatività delle variabili, trattandosi di grandezze misurabili.

Quando le **variabili di decisione** sono due (x e y oppure x_1 ed x_2), si può risolvere un problema di questo tipo con il **metodo grafico.**

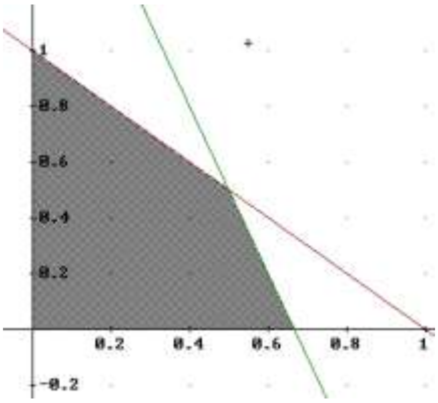
Se la funzione da ottimizzare è in due variabili, ha equazione **z=ax+by**, essa rappresenta nello spazio a tre dimensioni un piano che passa per l'origine**.**
Rappresentando una linea di livello ad esempio z=k con k>0, si riesce a determinare la direzione dei valori crescenti per le linee di livello, la linea di livello z=0 passa sempre per l'origine, quindi il vettore che indica la direzione crescente delle linee di livello, si può pensare applicato nell'origine e $\perp$ alla linea di livello z=k.

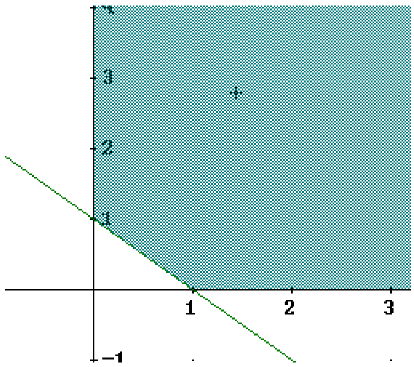
Esempio: le frecce nere indicano la direzione crescente delle linee di livello





I vincoli sono dati da un insieme di disequazioni e/o equazioni, le cui soluzioni, sul piano cartesiano, individuano un poligono convesso o una regione illimitata.





vincoli: $x \geq 0$ e $y \geq 0$ e $y \leq -x+1$e $y \leq -3x+ 2$ vincoli: $x \geq 0$e $y \geq o$ e $y \geq -x+1$

Tutte i punti che stanno nella regione sono detti **soluzioni ammissibili**, mentre le coordinate dei vertici del poligono o della regione sono dette **soluzioni ammissibili di base**: fra queste ultime va cercata, se esiste, la soluzione ottima del problema.
In corrispondenza di ogni vertice del poligono, infatti, si calcola il valore della funzione obiettivo, e si sceglie la coppia di numeri reali che rende ottima (cioè massima o minima, a seconda dei casi) la funzione stessa.
Il **teorema fondamentale della programmazione lineare** afferma che: *il massimo ed il minimo di una funzione lineare di un numero qualsiasi di variabili soggetta a vincoli espressi da equazioni e/o da disequazioni lineari, se esistono, si trovano sul contorno o sui vertici della regione ammissibile, e non al suo interno*.
Nel caso particolare in cui in corrispondenza di due vertici consecutivi si ottiene lo stesso valore della funzione obiettivo, la teoria della programmazione lineare dimostra che lo stesso valore si ottiene in corrispondenza di un qualsiasi punto del segmento che unisce i due vertici.
Passaggi da svolgere per risolvere un problema di programmazione lineare**:**

1) individuare le soluzioni ammissibili rappresentando graficamente le soluzioni dei vincoli
2) tracciare una retta di livello $z=k$ con $k>0$ e il vettore con origine in $O(0;0)$ e perpendicolare alla linea di livello
3) individuare la direzione dei valori crescenti per le linee di livello se si cerca un massimo o quella dei valori decrescenti se si cerca un minimo
4) individuare il punto in cui la funzione z assume il valore ottimale (minimo o massimo secondo i casi)
5) calcolare le coordinate del punto individuato
6) sostituire le coordinate del punto individuato nella funzione z e calcolarne il valore.

ESEMPIO

Risolvere graficamente il seguente problema di programmazione lineare:

variabili di decisione: x ed y

funzione obiettivo: min(150x+300y)

vincoli: $26x \geq 13$ e $2x+y \geq 4$ e $3x+10y \geq 12$ e $x \geq 0$ e $y \geq 0$

Svolgimento

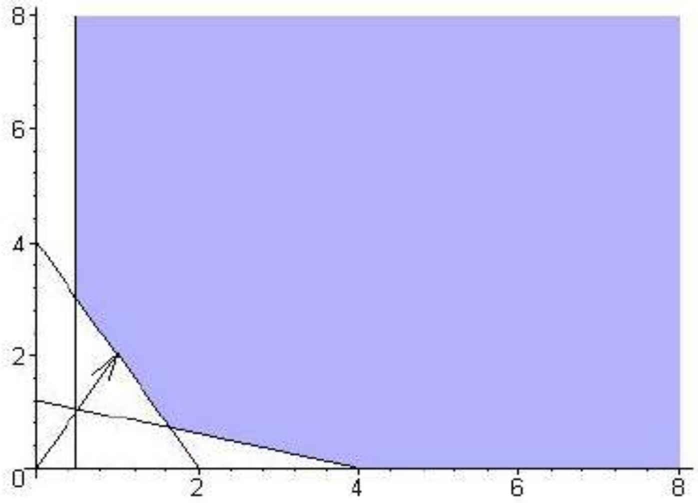


Figura 3: Regione ammissibile e vettore della direzione di crescita

Bisogna rendere minima la funzione obiettivo quindi bisogna intersecare le rette 2x+y=4 e 3x+10y=12, si trova il vertice di coordinate **(28/17, 12/17)** , tali valori sostituiti nella funzione obiettivo danno come valore minimo **7800/17**

ESERCIZIO 1

Una pasticceria produce due tipi di crèmees brullès: ai frutti di bosco ed alla cannella.

Per chilo di prodotto sono utilizzate le quantità di ingredienti riportate nella tabella

Ingredienti	Crema ai frutti di bosco	Crema alla cannella
Latte (litri)	12	23
Panna (litri)	35	20
Uova	40	25
Zucchero(grammi)	230	180

La disponibilità giornaliera degli ingredienti è di 1500 l di latte, 3150 l di panna, 2000 uova e 18Kg di zucchero. I dolci sono venduti al prezzo di 20 euro al chilo e 12.50 euro al chilo. Scrivere un modello di programmazione lineare per determinare la produzione giornaliera che massimizza i profitti. Determinare graficamente la soluzione ottima.

SVOLGIMENTO

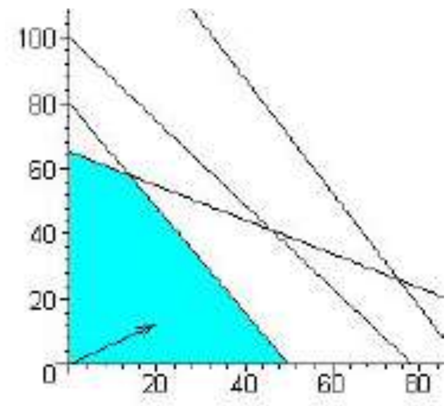
Variabili di decisione: x ed y quantità di dolci da produrre giornalmente

Funzione obbiettivo: profitto totale z=20x+12.5y

Vincoli: l'impiego degli ingredienti non può superare la disponibilità:

$12x+23y \leq 1500$ e $35x+20y \leq 3150$ e $40x+25y \leq 2000$ e $230x+180y \leq 18000$ e $x \geq 0$ e $y \geq 0$

<u>La funzione obiettivo va resa massima</u>



Il valore massimo si ottiene sia nel punto (425/31,1800/31) sia in (50,0) quindi su tutta la retta che unisce i due vertici della regione ammissibile e il valore massimo è 100 euro

ESERCIZIO 2

Una fabbrica di giocattoli produce due tipi di trenini. Il primo tipo è di legno ed il secondo in plastica.

Il processo produttivo si svolge in tre reparti. La fabbrica impiega 18 operai nel primo reparto, 10 nel secondo e 8 nel terzo. Gli operai lavorano 8 ore al giorno per 5 giorni a settimana. I tempi di lavorazione, in minuti, richiesti e i relativi profitti sono:

prodotti	Reparto 1	Reparto2	Reparto3	Profitti (euro)
Trenini in legno	25’	40’	7’	45
Trenini in plastica	50’	70’	10’	65

Determinare quanti giocattoli produrre per massimizzare il guadagno.

SOLUZIONE:

Contiamo i minuti di lavoro massimi alla settimana in ciascun reparto:

Reparto 1 : minuti di lavoro settimanali 18*8*60*5=43200

Reparto 2: minuti di lavoro settimanali 10*8*60*5=24000

Reparto 3 : minuti di lavoro settimanali 8*8*60*5=19200

Variabili di decisione: x ed y quantità di trenini da produrre a settimana

Funzione obbiettivo: profitto totale z=45x+65y

Vincoli: 25x+50y≤43200 e 40x+70y≤24000 e 7x+10y≤19200 e x≥0 e y≥0

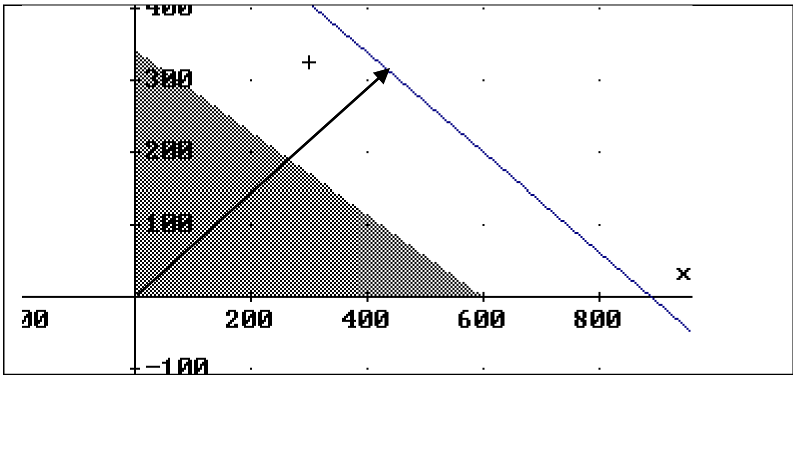


Grafico della regione ammissibile con linea di livello z=4000 e vettore di direzione di crescita delle linee di livello

Il massimo si ha nel vertice di coordinate **(600,0)** e il valore massimo è **27000** euro

ESERCIZIO 3: Una industria vuole commercializzare un prodotto dietetico che contiene due sostanze S1 ed S2 che forniscano una giusta quantità di vitamine: vuole fare una miscela delle due sostanze che fornisca la giusta quantità di vitamine con il minimo costo.
La prima sostanza costa 0,50 euro all'etto e contiene all'etto 0,8 mg di B_1, 1mg di B_2, 0,8 mg di B_6.
La seconda sostanza costa 0,35 euro all'etto e contiene all'etto 0,6 mg di B_1, 0,6mg di B_2, 0,9 mg di B_6.
Il contenuto minimo delle tre vitamine deve essere : 2,8mg di B_1, 9mg di B_2 e 10 mg di B_6.
SOLUZIONE
Rappresentazione schematica dei dati

	S1	S2	Quantità minime
Vitamina B_1 (mg)	0,8	0,6	2,8
Vitamina B_2 (mg)	1	0,6	9
Vitamina B_6 (mg)	0,8	0,9	10
COSTI (euro all'etto)	0,50	0,35	

Variabili di decisione: x ed y quantità di sostanze da miscelare (in ettogrammi)
Funzione obbiettivo: costo totale $z=0{,}50x+0{,}35y$
Vincoli: $0{,}8x+0{,}6y\geq 2{,}8$ e $1x+0{,}6y\geq 9$ e $0{,}8x+0{,}9y\geq 10$ e $x\geq 0$ e $y\geq 0$

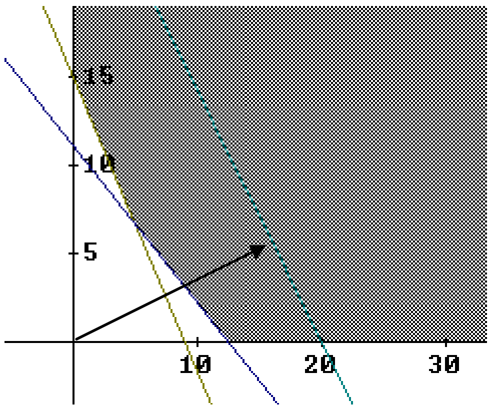


Grafico della regione ammissibile con linea di livello z=10 e vettore di direzione di crescita delle linee di livello.

Poiché si deve rendere minima la funzione obiettivo, si deve considerare la direzione opposta al vettore di crescita.
Il vertice che risolve il problema ha coordinate **(5;20/3)** ottenute intersecando le rette
$x+0{,}6y=9$ e $0{,}8x+0{,}9y=10$.
La minima spesa all'ettogrammo della miscela è **4,83 euro**

1) **Rispondere alle seguenti domande**:
   a) In un problema di programmazione lineare, le coordinate di una soluzione ammissibile soddisfano il sistema dei vincoli.
   Vero Falso
   b) In un problema di programmazione lineare in due variabili, la condizione di non negatività sulle variabili limita la ricerca della soluzione ottima lungo il semiasse delle ordinate positive.
   Vero Falso
   c) In un problema di programmazione lineare, la regione ammissibile contiene solo i punti le cui coordinate rappresentano la soluzione ottima del problema.
   Vero Falso
   d) In un problema di programmazione lineare in due variabili, le rette associate ai vincoli formano sempre, con il semiasse delle ascisse positive, un angolo ottuso.
   Vero Falso
   e) In un problema di programmazione lineare la funzione obiettivo è determinata dalle esigenze dei fornitori dell'azienda che deve risolvere il problema.
   Vero Falso

f) In un problema di programmazione lineare, una soluzione ammissibile di base è sicuramente una soluzione ottima.

Vero Falso

Rispondere alle seguenti domande, scegliendo, tra le risposte indicate, quella esatta:

a) In un problema di programmazione lineare, una variabile di decisione è:
- Una variabile il cui valore dipende dalle esigenze dei clienti dell'azienda;
- Una variabile il cui valore è da determinare per conseguire un prefissato obiettivo;
- Una variabile che ha sempre valore costante;
- Una variabile il cui valore dipende dall'andamento del mercato nel quale opera l'azienda.

b) **In un problema di programmazione lineare in due variabili, la regione ammissibile va determinata:**
- Inserendo la funzione obiettivo nel sistema dei vincoli;
- Risolvendo il sistema dei vincoli e rappresentandolo nel piano cartesiano opportuno;
- Assegnando dei valori positivi ad una delle variabili di decisione;
- Assegnando dei valori positivi ad entrambe le variabili di decisione.

c) **In un problema di programmazione lineare, la funzione obiettivo è:**
i)Una funzione che esprime la disponibilità di materie prime;
ii)Una funzione il cui valore cambia nel tempo;
iii)L'insieme delle informazioni di cui si dispone;
iv)Una funzione il cui valore dipende dalle variabili di decisione, da rendere ottima.

d) **In un problema di programmazione lineare, un vincolo tecnologico è:**
i)Il numero dei dipendenti dell'azienda;
ii)Una disequazione o equazione determinata dalle caratteristiche tecniche del problema;
iii)Una informazione della quale si viene a conoscenza durante la soluzione del problema;
iv)Una informazione della quale si viene a conoscenza dopo la soluzione del problema.

ESERCIZI DA SVOLGERE

1)Data la funzione obiettivo z= x+2y e i vincoli

$$\begin{cases} x+y \geq 1 \\ 2x+4y \geq 3 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Determina per quali valori di x ed y la funzione obiettivo assume il valore minimo

2)Data la funzione obiettivo z= x+2y e i vincoli

$$\begin{cases} x+y \leq 2 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Determina per quali valori di x ed y la funzione obiettivo assume il valore massimo

Risolvere i seguenti problemi di programmazione lineare :

1. $\min(x+2y)$ con i vincoli: $x+y \geq 1$, $2x+4y \geq 3$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.
2. $\max(5x+7y)$ con i vincoli: $x+y \geq 2$, $2x+3y \geq 12$, $3x+y \leq 12$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.
3. $\min(2x+3y)$ con i vincoli: $x \geq 0$, $y \geq 0$.
4. $\min(x+2y)$ con i vincoli: $x+y \geq 2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.
5. $\max(1000x+2000y)$ con i vincoli: $-x+2y \leq 160$, $2x-y \leq 80$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.
6. $\max(100x+10y)$ con i vincoli: $-y \leq 50$, $x+y \leq 70$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.
7. $\max(80x+40y)$ con i vincoli: $x-y \geq -50$, $x \leq 40$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

8- Massimizzare e minimizzare la funzione f(x,y)=5x+2y , soggetta ai vincoli: $x+y \leq 0$; $2x+y \geq 10$; $x+2y \geq 10$; $x \geq 0$; $y \geq 0$

9- max(3x+2y) con i vincoli $3x+2y \leq 120$; $x+y \leq 50$; $x \geq 0$; $y \geq 0$

10- max(80x+160y) con i vincoli $x+y \leq 300$; $y \leq \frac{1}{3}x$; $x \geq 0$; $y \geq 0$ ris (225,75)

11)

Un'azienda produce due tipi di borse: un modello economico e uno di lusso. Il modello economico richiede due ore di lavoro a macchina e due ore di lavoro di finitura a mano, mentre quello di lusso richiede lo stesso tempo di lavorazione a macchina, ma quattro ore di finitura a mano. L'azienda ha due addetti alle macchine e tre addetti ala finitura. Ciascun addetto lavora 40 ore a settimana. Ogni borsa economica fornisce un profitto di 3€ e ogni borsa di lusso un profitto di 4€. Supponendo che ogni oggetto sia venduto, quanto oggetti devono essere prodotti per massimizzare il profitto?

Indicando con x e con y il numero di borse di tipo economico e di lusso, rispettivamente, la funzione obiettivo da massimizzare è

$$\min(3x + 4y).$$

I vincoli sono espressi dal numero di ore lavorative complessive del dipendenti dell'azienda. Poiché ci sono 2 addetti alle macchine e 3 addetti alla finitura i vincoli sono: $2x + 2y \leq 80$, $2x + 4y \leq 120$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ e ovviamente le soluzioni devono essere intere. Risolvendo il problema si trova che $x = 20$ e $y = 20$. In corrispondenza di questo livello di produzione il profitto è 140€.

12) Un'azienda tessile produce due tipi di tessuti utilizzando tre filati (lana, poliestere, seta) in diversa proporzione. Nella tabella sono riportate le quantità di filati che occorrono per realizzare una pezza dei due tessuti (di lunghezza unitaria) e le giacenze del magazzino. Individuare la produzione che rende massimo il ricavo, sapendo che il rapporto tra i prezzi (unitari) dei tessuti A e B è 2/3.

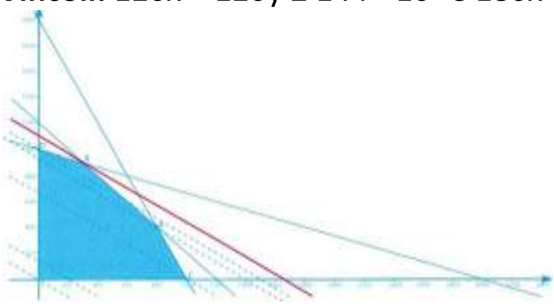
Filato	Tessuto A	Tessuto B	Magazzino
lana	120 g	120 g	144 Kg = $144 \cdot 10^3$g
poliestere	180 g	90 g	180 Kg = $180 \cdot 10^3$ g
seta	60 gr.	180 g	180 Kg = $180 \cdot 10^3$g

Soluzione

Variabili di decisione: x ed y metri di tessuto A metri di tessuto B

Funzione obiettivo: z=(2t)x+(3t)y dove t è un parametro che fa variare il prezzo del tessuto mantendo il rapporto 2/3 tra i prezzi dei tessuti. Nello svolgimento si considera t=1.

Vincoli: $120x + 120y \leq 144 \cdot 10^3$ e $180x + 90y \leq 180 \cdot 10^3$ e $60x + 180y \leq 180 \cdot 10^3$ e $x \geq 0$ e $y \geq 0$



Il massimo ricavo si ha nel vertice A

A ***(300, 900)*** intersezione tra le rette x+y= *1200* e *x+3y=300*

con *300 m* del primo tessuto e *900 m* del secondo

Il ricavo massimo è di **3.300t** Euro.

13) Una falegnameria produce mobili usando legno di pino, di noce e di mogano; del primo ha una disponibilità mensile di 4 q, del secondo di 3 q e del terzo di 2 q. I modelli di mobile sono soltanto due: M ed N. Per produrre una unità di M occorrono 2 kg di pino, 4 kg di noce e 1 kg di mogano; per produrre una unità di N occorrono, invece, 3 kg di pino, 1 kg di noce e 1,5 di mogano. Se il guadagno unitario per M è di € 300,00, e quello per N è di € 250,00, quanti mobili del tipo M e quanti del tipo N devono essere prodotti per rendere massimo il guadagno complessivo?

Soluzione: produrre **50** unità al mese del mobile M e **100** unità al mese del mobile N, ottenendo un guadagno mensile di **40000** Euro.

14) Per la produzione di due oggetti A1 ed A2, una ditta ha a disposizione, settimanalmente, 65 kg di materie prime e 40 ore di lavoro macchina; ogni articolo del tipo A1 richiede 2Kg di materie prime e 45 minuti di lavoro macchina; ogni articolo del tipo A2 richiede 1Kg di materie prime e 1 ora di lavoro macchina.

Sapendo che il ricavo di ogni pezzo A1 è di 20 euro e di ogni pezzo A2 è di 23 euro, determinare la quantità di oggetti da produrre per avere il massimo ricavo settimanale.

Soluzione: il massimo ricavo è **975 euro** e si ottiene con **20** oggetti del tipo A1 e **25** oggetti del tipo A2

15) Una casa editrice produce cassette per la scuola di due tipi. Le cassette passano attraverso due fasi di lavorazione, che indichiamo con A e B. Le ore necessarie per ogni fase e per ogni cassetta e le ore totali disponibili settimanalmente sono riportate in tabella.

	Cassetta 1	Cassetta 2	Max ore
Fase A	1	1,6	200
Fase B	2,5	1,6	400

Il guadagno netto è di € 6 per il primo tipo di cassetta e di € 8 per il secondo. Determina come deve essere organizzata la produzione per avere il massimo guadagno tenendo presente che le richieste superano la produzione.

Soluzione: Il massimo guadagno di **€ 1.126** si ottiene producendo **133** cassette del primo tipo e **41** del secondo tipo.

16) Un allevatore vuole ottenere una razione alimentare per bestiame dalla miscela di due prodotti, P e Q, in commercio che, rispetto a tre caratteristiche nutritive A, B, C sono così composti:

- ogni chilo di P contiene 0,4 chili di A , 0,3 chili di B e 0,3 chili di C;
- ogni chilo di Q contiene 0,2 chili di A, 0,2 chili di B e 0,6 chili di C.

Sapendo che per una corretta alimentazione occorrono giornalmente almeno 2 kg di A, 1 kg di B e 2,4 kg di C, e che il costo del prodotto P è di 0,3 euro/kg e quello del prodotto Q è di 0,5 euro/kg, determinare quanti kg di P e quanti di Q l'allevatore deve miscelare per ottenere una razione giornaliera di costo minimo. **(Soluzione)**: $z=0.3x+0.5y$, il punto è (4;2), il costo minimo si ottiene miscelando 4kg di sostanza P e 2kg di sostanza Q. Il costo minimo al kg della miscela è circa $(4*0.3+2*0.5)/6=0,37$ euro /kg.

17) Un imprenditore vuole programmare la produzione di due beni A e B utilizzando due macchine M1 e M2, che possono lavorare settimanalmente per 40 ore ciascuna.

Per produrre una unità di A occorrono 40 minuti di lavoro di M1 e 30 minuti di lavoro di M2; per produrre una unità di B occorrono 30 minuti di lavoro di M1 e 60 minuti di lavoro di M2. Per esigenze di produzione, ogni settimana devono essere prodotte <u>complessivamente</u> almeno 50 unità.

Sapendo che il costo di produzione di ogni unità di A è di euro 18 ed il costo di produzione di ogni unità di B è di euro 15, determinare la combinazione produttiva di minimo costo complessivo.
Soluzione: il minimo è in (20;30) e il minimo costo è 810 euro.

18) Il proprietario di un ranch sta facendo dei test per determinare la mescola corretta per due classi di alimenti. Entrambi contengono in percentuali differenti quattro diversi tipi di ingredienti.
L'alimento 1 ha un costo unitario di 5 dollari ed è formato per il 40% dall'ingrediente 1, per il 10% dall'ingrediente 2, per il 20% dall'ingrediente 3 e per il 30% dall'ingrediente 4.
L'alimento 2 ha un costo unitario di 3 dollari ed è formato per il 20% dall'ingrediente 1, per il 30% dall'ingrediente 2, per il 40% dall'ingrediente 3 e per il 10% dall'ingrediente 4.
Sapendo che devono essere impiegate come minimo 400 unità dell'ingrediente 1, 200 unità dell'ingrediente 2, 300 unità dell'ingrediente 3 , 600 unità dell'ingrediente 4, si vuole determinare la mescola di costo minimo. **Soluzione**:(2000;0) compera solo l'alimento 1, minimo costo 10000 dollari

19) Una nave può trasportare due tipi di merce, M1 e M2. Ogni tonnellata di M1 occupa un volume di 0,6 metri cubi, e ogni tonnellata di M2 occupa un volume di 0,4 metri cubi. La nave ha un volume massimo disponibile di 1800 metri cubi e non può trasportare più di 4000 tonnellate di merce; inoltre, la quantità da trasportare di M2 deve essere non inferiore a quella di M1.
Sapendo che dal trasporto della merce M1 si ha un utile di 2000 euro per tonnellata, e dal trasporto della merce M2 si ha un utile di 1500 euro per tonnellata, determinare la composizione del carico più conveniente. **Soluzione**:(1000;3000) , utile max 6500000 euro

20) Un reparto di una azienda di elettrodomestici può produrre giornalmente non più di 6 lavatrici, alcune di tipo A e altre di tipo B. Il turno di lavoro non può superare le 8 ore giornaliere; una lavatrice di tipo A richiede 2 ore di lavoro, mentre una di tipo B ne richiede una. Se una lavatrice di tipo A costa 600 euro e una di tipo B 400 euro, quante lavatrici di ciascun tipo devono essere prodotte giornalmente affinché l'azienda realizzi il massimo guadagno?
Soluzione: Variabili : x ed y numero lavatrici tipo A e tipo B **Funzione obiettivo:** $z=600x+400y$
Vincoli: $x + y \leq 6$ e $2x + y \leq 8$ e $x \geq 0$ e $y \geq 0$ **La soluzione** ottimale è data da **x=2 ed y=4.** Producendo giornalmente 2 lavatrici di tipo A e 4 di tipo B, l'azienda realizza il massimo guadagno, il massimo ricavo è 2800 euro.

ESERCIZI

1. Per la produzione di due tipi di stampi, che indicheremo con A e B, un'impresa artigianale può disporre di 1200 Kg di resina e di 900 ore di lavoro. I dati tecnici relativi alla produzione sono i seguenti:

   - Ogni stampo di tipo A richiede 5 Kg di resina e 5 ore di lavorazione;
   - Ogni stampo di tipo B richiede 12 Kg di resina e 2 ore di lavorazione;

   I prezzi a cui gli stampi vengono rivenduti sono di 800 Euro per il tipo A e di 500 Euro per il tipo B. Determina il numero di stampi dei due tipi che è opportuno produrre per avere il massimo ricavo possibile.

2. Un'industria produce due tipi di borse: A di lusso e B economico. Dalla loro vendita realizza un guad unitario rispettivamente di 30 euro e di 20 Euro.
   I dati tecnici relativi al processo produttivo giornaliero sono indicati nella seguente tabella:

	A	B	Risorse Max
Materia prima (Kg)	2	2	800
Tempo di lavorazione (h)	2	1	500
Borchia dorata (n°)	1	0	200

   Trovare la quantità di ciascun articolo da produrre giornalmente per realizzare il massimo profitto.

3. Un'azienda agrituristica partecipa ad una fiera espositiva a scopo pubblicitario e vuole acquistare dei gadgets da offrire in omaggio ai visitatori. Può scegliere tra due tipi di regali: cappellini o portachiavi. Il costo unitario è rispettivamente 1 Euro per un cappellino e 1,2 Euro per un portachiavi.
   Calcolare quanti articoli conviene acquistare per rendere minima la spesa nell'ipotesi che:
   a. I visitatori stimati siano almeno 3000;
   b. Il numero di portachiavi sia almeno doppio del numero di cappellini.

Un tale ha a disposizione 700 Euro e vuole acquistare dei libri e dei contenitori di dischi. Ogni libro costa 15 euro ed ogni contenitore 12 Euro. Il loro spessore è rispettivamente di 7 cm e 5 cm.
Vuole sapere se la cifra a disposizione è sufficiente per l'acquisto di libri e contenitori quando devono essere soddisfatte le seguenti condizioni:

c. Il numero di libri deve essere non inferiore a 15 e non superiore a 30;
d. Il numero di contenitori deve essere non inferiore a 10 e non superiore a 30;
e. Il numero complessivo di libri e contenitori non deve superare 50;
f. Libri e contenitori devono essere allineati su una mensola di lunghezza non superiore a 3m.