Piccola introduzione alla teoria dei Giochi

Eugenio Montefusco
www.mat.uniroma1.it/people/montefusco

Progetto Lauree Scientifiche
01.09.2015

In queste poche pagine vogliamo dare alcune idee riguardo la **teoria dei giochi.** Ovviamente non vogliamo esssere né rigorosi, tanto meno esaustivi, ma solo suscitare un po' di curiosità. Il lettore interessato può cercare dei testi completi ed esaurienti sull'argomento. Le note che seguono sono largamente ispirate dal libro *Game Theory Evolving* di H. Gintis.

1 Cos'è un gioco

Per un matematico un **gioco** è una struttura che consiste in un insieme di agenti o **giocatori** che compiono delle decisioni scelte tra un insieme di azioni ammissibili (secondo le regole del gioco) chiamate **strategie.** La scelta della strategia viene compiuta contemporaneamente (o, in ogni caso, all'insaputa degli altri contendenti fino alla fine del turno di gioco) e tutti i giocatori hanno le stesse informazioni sullo stato iniziale del sistema. Al contrario se le mosse dei giocatori vengono compiute in un ordine prestabilito il gioco si evolve molto diversamente.
Nella nostra chiacchierata ci limiteremo al caso di due soli giocatori, che chiameremo A e B, e due sole strategie: tali giochi sono comunemente denominati **giochi due per due.**

Un tale gioco si rappresenta usualmente con una bimatrice come la seguente

$$\begin{pmatrix} a_{11}\Big/b_{11} & a_{12}\Big/b_{12} \\ a_{21}\Big/b_{21} & a_{22}\Big/b_{22} \end{pmatrix}$$

Il giocatore A sceglie la riga, ovvero l'indice j, mentre B decide la colonna, cioè il secondo indice k, in tal modo insieme determinano l'esito del match. Infatti il primo giocatore riceve il compenso a_{jk} e il secondo b_{jk} dove $j,k \in \{1,2\}$. Si noti che le entrate a_{jk},b_{jk} sono numeri reali, possono essere quantità positive o negative, ovvero guadagni o perdite!
La teoria dei giochi si propone di individuare la migliore condotta di gioco possibile per entrambi i giocatori, lo scopo è di massimizzare i profitti o (equivalentemente) di minimizzare le perdite.

2 Equilibri di Nash

Svariati esempi mostrano che alcuni giochi possiedono una stretegia ottimale per i due giocatori, mentre altri no. Questo sembra essere un problema grosso, perché sembra che per alcuni giochi la matematica non sia in grado di suggerire una condotta di gioco.
Proviamo ad allargare i nostri orizzonti: finora abbiamo sempre pensato di giocare sempre e solo con la stessa strategia, pensando di ripetere il gioco molte volte possiamo adottare una condotta di gioco "probabilistica", cioè scegliendo una strategia con una probabilità fissata. In pratica affidiamo la nostra scelta a qualcosa di somigliante ad un dado! Il primo tipo di tattica viene in genere chiamato **strategia pura** il gioco "probabilizzato" **strategia mista.**
Consideriamo un generico gioco due per due e la sua bimatrice

associata

$$M = \begin{pmatrix} a_{11}\big/b_{11} & a_{12}\big/b_{12} \\ a_{21}\big/b_{21} & a_{22}\big/b_{22} \end{pmatrix}$$

e cerchiamo di studiare il comportamento ottimale per i due contendenti.
Siccome entrambi hanno due sole scelte chiamiamo $\alpha \in ([0,1]$ la probabilità che A scelga $j = 1$, naturalmente segue che $(1-\alpha) \in [0,1]$ è la probabilità che scelga $j = 2$. Analogamente β sarà la probabilità che B giochi $k = 1$.
Calcoliamo il guadagno atteso per A, ricordando che la probabilità di due eventi indipendenti è il prodotto dei singoli eventi

$$\pi_A(\alpha) = a_{11}\alpha\beta + a_{12}\alpha(1-\beta) + a_{21}(1-\alpha)\beta + a_{22}(1-\alpha)(1-\beta)$$

Siccome A controlla solo il parametro α conviene scrivere

$$\begin{aligned} \pi_A(\alpha) &= [(a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})\beta + a_{12} - a_{21}]\,\alpha + [(a_{21} - a_{22})\beta + a_{22}] \\ &= m(M,\beta)\alpha + q(M,\beta) \end{aligned}$$

Siccome α appartiene ad un intervallo chiuso e limitato e $\pi_A(\alpha)$ è una funzione continua (esattamente un polinomio di primo grado nella variabile) il teorema di Weierstrass garantisce l'esistenza di un massimo assoluto, cioè la possibilità di massimizzare il guadagno. È anche molto facile calcolare il punto di massimo $\overline{\alpha}$: infatti il grafico di π_A è descritto da un retta, quindi la posizione del punto di massimo dipende esclusivamente dal coefficiente angolare $m(M,\beta) = (a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})\beta + a_{12} - a_{21}$, Quindi possiamo precisamente affermare che

$$\begin{aligned} \overline{\alpha} = 0 \quad & \text{se } m(M,\beta) < 0 \\ \overline{\alpha} = \alpha \in [0,1] \quad & \text{se } m(M,\beta) = 0 \\ \overline{\alpha} = 1 \quad & \text{se } m(M,\beta) > 0 \end{aligned}$$

Se $(a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}) > 0$, questa relazione implica che

$$\begin{aligned} &\text{se } \beta < \frac{a_{21} - a_{12}}{(a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})} \quad \text{allora } \overline{\alpha} = 0 \\ &\text{se } \beta = \frac{a_{21} - a_{12}}{(a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})} \quad \text{allora } \overline{\alpha} = \alpha \in [0,1] \\ &\text{se } \beta > \frac{a_{21} - a_{12}}{(a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})} \quad \text{allora } \overline{\alpha} = 1 \end{aligned}$$

In conclusione abbiamo scritto esplicitamente la migliore risposta possibile del giocatore A alle scelte di B.
Ovviamente, procedendo in maniera analoga, per il contendente B si ottiene

$$\begin{aligned}\pi_B(\alpha) &= [(b_{11}-b_{12}-b_{21}+b_{22})\alpha+b_{12}-b_{22}]\,\beta+[(b_{12}-b_{22})\beta+b_{22}]\\ &= m(M,\alpha)\beta+q(M,\alpha)\end{aligned}$$

e, come sopra, è possibile ricavare l'espressione della migliore risposta possibile di B al gioco di A.
Quindi le funzioni di miglior risposta sono delle spezzate composte di tre segmenti paralleli agli assi coordinati nel piano cartesiano $\alpha O\beta$ e sono sempre contenute nel quadrato di vertici $O,(0,1),(1,1),(1,0)$, tali spezzate devono necessariamente intersecarsi in (almeno) un punto. Tali punti sono detti **equilibri di Nash** e caratterizzano le coppie di strategie miste tali che nessun giocatore può, singolarmente, migliorare il proprio esito.

Cerchiamo di ripercorrere il ragionamento analizzando un caso concreto, il gioco chiamato **colombe contro falchi.** In una popolazione di animali i componenti lottano l'uno contro l'altro per una risorsa (r) molto contesa. Le strategie adottate dagli animali sono essenzialmente due: mostrarsi aggressivi (F come falco) o rinunciatari (C come colomba). La bimatrice seguente mostra l'esito dei possibili incontri

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc}\quad\mathsf{F} & \qquad\mathsf{C}\end{array} \\ \begin{array}{c}\mathsf{F}\\ \mathsf{C}\end{array} & \begin{pmatrix} -d/2\big/-d/2 & r\big/0 \\ 0\big/r & r/2\big/r/2 \end{pmatrix}\end{array}$$

se due colombe si incontrano si dividono equamente la risorsa, se un falco incontra una colomba si prende tutto lasciando a mani vuote l'opponente, se due falchi si scontrano passano a vie di fatto e si fanno male procurandosi un serio danno $0<r<d$.
Osserviamo subito che la bimatrice è di fatto simmetrica, quindi basta studiare la funzione $\partial_A(\alpha)$. Ricordando quanto scritto

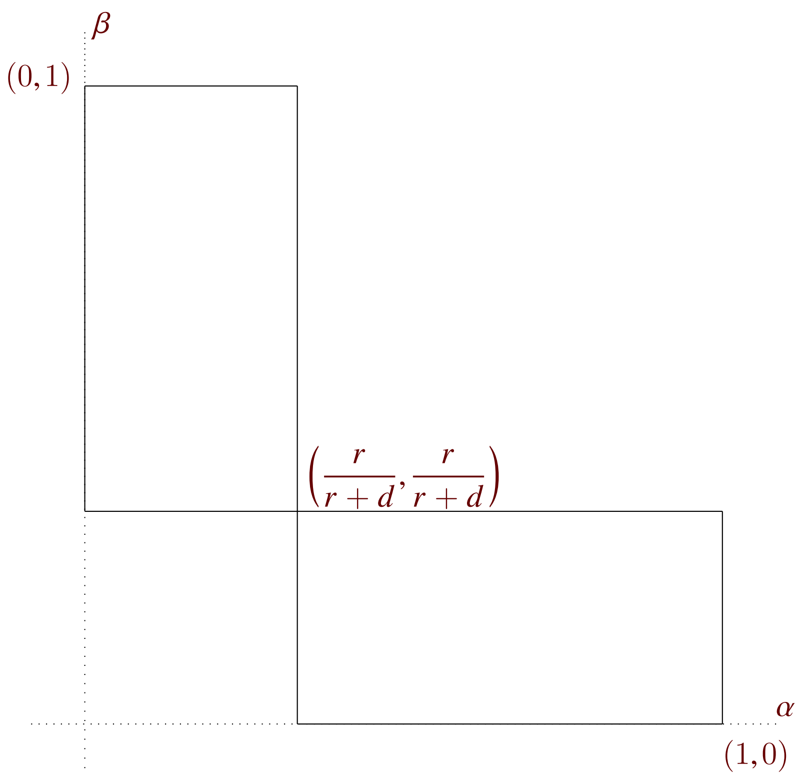
sopra abbiamo che

$$
\begin{aligned}
\pi_A(\alpha) &= [(a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})\beta + a_{12} - a_{21}]\,\alpha + [(a_{21} - a_{22})\beta + a_{22}] \\
&= [(-d/2 - r + r/2)\beta + r]\,\alpha + [-r/2\beta + r/2] \\
&= \frac{1}{2}\,[r - (d + r)\beta]\,\alpha + \frac{r}{2}(1 - \beta)
\end{aligned}
$$

da cui segue che

$$
\begin{aligned}
&[r - (d + r)\beta] > 0 \qquad \text{se e solo se} \qquad \beta < \frac{r}{r + d} \\
&[r - (d + r)\beta] = 0 \qquad \text{se e solo se} \qquad \beta = \frac{r}{r + d} \\
&[r - (d + r)\beta] < 0 \qquad \text{se e solo se} \qquad \beta > \frac{r}{r + d}
\end{aligned}
$$

Disegnamo le spezzate di cui parlavamo precedentemente, in questo caso troviamo



Dal disegno si può apprezzare l'esistenza di tre equilibri di Nash. Però solo l'equilibrio che non si trova sugli assi ha rilevanza biologica, visto che ci fornisce una stima sulla percentuale della popolazione che adotta la strategia falco. Si noti che tale percentuale è tanto più bassa quanto più il danno d è grande "rispetto" al valore della risorsa r.
Dal punto di visto dell'etologia questa osservazione spiega perché gli animali più grandi raramente (per esempio nei combattimenti per il territorio o per la riproduzione) adottano strategie realmente aggressive: infatti in caso di uno scontro effettivo il rischio di ferite gravi o mortali è molto elevato.