# Giochi, Strategie e Matematica

**Eugenio Montefusco**

*eugenio.montefusco@uniroma1.it*
LSS T. Gullace Talotta

# Cos'è un gioco

Per un matematico un **gioco** è una struttura che consiste in un insieme di agenti o **giocatori** che compiono delle decisioni scelte tra un insieme di azioni ammissibili (secondo le regole del gioco) chiamate **strategie**.

# Cos'è un gioco

La scelta della strategia viene compiuta **contemporaneamente** (o, in ogni caso, all'insaputa degli altri contendenti fino alla fine del turno di gioco) e tutti i giocatori hanno le **stesse** informazioni sullo stato iniziale del sistema.

**Attenzione**: se le mosse dei giocatori vengono compiute in un ordine prestabilito il gioco si può sviluppare molto diversamente.

# Cos'è un gioco

Nella nostra chiacchierata ci limiteremo al caso di due soli giocatori, che chiameremo $A$ e $B$, e due sole strategie: tali giochi sono comunemente denominati **giochi due per due**.

# Un esempio: lavorare ad obiettivi

Due colleghi insofferenti e un progetto da realizzare...

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cc} L & NL \end{array} \\
\begin{array}{c} L \\ NL \end{array} & \begin{pmatrix} 2|2 & 0|1 \\ 1|0 & 0|0 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

# Un altro esempio: pari o dispari?

I due contendenti scelgono un numero tra 0 e 5
se la somma è pari vince $B$ se è dispari vince $A$

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cc} \mathrm{P} & \mathrm{D} \end{array} \\
\begin{array}{c} \mathrm{P} \\ \mathrm{D} \end{array} & \begin{pmatrix} -1 \mid +1 & +1 \mid -1 \\ +1 \mid -1 & -1 \mid +1 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

# Matematizziamo un gioco

Un tale gioco si rappresenta usualmente con uno schema (chiamato **bimatrice**) come il seguente

$$\left(a_{jk} \middle| b_{jk}\right) = \begin{pmatrix} a_{11} \vert b_{11} & a_{12} \vert b_{12} \\ a_{21} \vert b_{21} & a_{22} \vert b_{22} \end{pmatrix}$$

Il giocatore $A$ sceglie la riga, ovvero il primo indice, mentre $B$ decide la colonna, cioè il secondo indice, determinando l'esito del match.

# Matematizziamo un gioco

Un tale gioco si rappresenta usualmente con uno schema (chiamato **bimatrice**) come il seguente

$$\left(a_{jk} \middle| b_{jk}\right) = \begin{pmatrix} a_{11} \big| b_{11} & a_{12} \big| b_{12} \\ a_{21} \big| b_{21} & a_{22} \big| b_{22} \end{pmatrix}$$

Il primo giocatore riceve il compenso $a_{jk}$ e il secondo $b_{jk}$. I numeri $a_{jk}, b_{jk}$ sono quantità positive o negative, ovvero guadagni o perdite.

# Scopo di un gioco

Lo **scopo** della teoria dei giochi è di individuare la migliore condotta di gioco possibile per entrambi i giocatori, quindi massimizzare i profitti o (equivalentemente) minimizzare le perdite.

# Osservazioni sulla condotta di gioco

Dagli esempi viti prima sembra che per alcuni giochi la matematica non sia in grado di suggerire come giocare. Finora abbiamo sempre pensato di giocare sempre con la stessa strategia, proviamo ad adottare una condotta di gioco **probabilistica**, cioè scegliendo una strategia con una probabilità fissata. In pratica affidiamo la nostra scelta ad un dado!

Il primo tipo di tattica viene chiamato **strategia pura**
il gioco "probabilizzato" **strategia mista**.

# Un po' di probabilità

- se $\mathbb{P}(E) = \lambda$ allora
$$\mathbb{P}(E^c) = (1 - \lambda)$$

- se $\mathbb{P}(E) = \lambda$ e $\mathbb{P}(F) = \mu$ e se i due eventi sono indipendenti, allora
$$\mathbb{P}(E \cap F) = \lambda\mu$$

# La miglior risposta

Consideriamo un generico gioco due per due

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} | b_{11} & a_{12} | b_{12} \\ a_{21} | b_{21} & a_{22} | b_{22} \end{pmatrix}$$

$A$ e $B$ hanno due sole scelte.
Sia $\alpha \in [0, 1]$ la probabilità che $A$ scelga $1$ e quindi $(1 - \alpha) \in [0, 1]$ sarà la probabilità che scelga $2$.
Analogamente $\beta$ sarà la probabilità che $B$ giochi $1$ e $(1 - \beta)$ la probabilità che scelga $2$

# La miglior risposta

Calcoliamo il guadagno atteso per $A$, ricordando che la probabilità di due eventi indipendenti è il prodotto dei singoli eventi

$$\pi_A(\alpha) = a_{11}\alpha\beta + a_{12}\alpha(1-\beta) + a_{21}(1-\alpha)\beta + a_{22}(1-\alpha)(1-\beta)$$

Siccome $A$ controlla solo il parametro $\alpha$ conviene scrivere

$$\begin{aligned} \pi_A(\alpha) &= m_1\alpha + q_1 \\ m_1 &= [(a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})\beta + a_{12} - a_{21}] \\ q_1 &= [(a_{21} - a_{22})\beta + a_{22}] \end{aligned}$$

# La miglior risposta

Siccome $\alpha \in [0,1]$ appartiene ad un intervallo chiuso e limitato e $\pi_A(\alpha)$ è una retta possiamo facilmente calcolare il punto di massimo $\overline{\alpha}$, il quale dipende esclusivamente dal coefficiente angolare

$$m_1 = (a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})\beta + a_{12} - a_{21}$$

# Il coefficiente angolare

$m > 0$ $m = 0$

# La miglior risposta

Quindi possiamo precisamente affermare che

$$\begin{aligned} \overline{\alpha} &= 0 && \text{se } m_1 < 0 \\ \overline{\alpha} &= \alpha \in [0,1] && \text{se } m_1 = 0 \\ \overline{\alpha} &= 1 && \text{se } m_1 > 0 \end{aligned}$$

Quindi abbiamo scritto esplicitamente la migliore risposta possibile di $A$ alle scelte di $B$.

# Equilibri di Nash

Ovviamente, procedendo in maniera analoga, per il contendente $B$ si ottiene

$$\begin{aligned}\pi_B(\beta) &= [(b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22})\alpha + b_{12} - b_{22}]\,\beta \\ &\quad + [(b_{12} - b_{22})\beta + b_{22}] \\ &= m_2\beta + q_2\end{aligned}$$

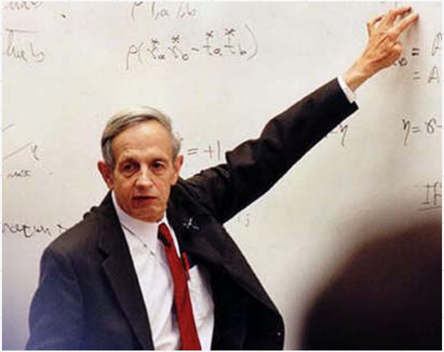
e, come sopra, è possibile ricavare l'espressione della migliore risposta possibile di $B$ al gioco di $A$.

# Equilibri di Nash

Le funzioni di miglior risposta sono delle spezzate composte di tre segmenti e sono sempre contenute nel quadrato di vertici $(0,0), (0,1), (1,1), (1,0)$.

Le spezzate devono necessariamente intersecarsi in almeno un punto. Tali punti sono detti **equilibri di Nash** e caratterizzano le coppie di strategie miste tali che **nessun giocatore può, singolarmente, migliorare il proprio esito**.

# John Nash



Johnny Nash (13.06.1928 West Virginia; 23.05.2015 New Jersey)

Premio Nobel in Economia nel 1994, premio Leroy Steele (AMS) nel 1999, premio Abel nel 2015.

# Colombe contro falchi

Analizziamo un caso concreto... Risorsa contro danno $0 < R < D$,
Due strategie: aggressivi $F$ o rinunciatari $C$.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \mathrm{F} & \mathrm{C} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathrm{F} \\ \mathrm{C} \end{array} & \begin{pmatrix} -D/2 \,|\, -D/2 & R \,|\, 0 \\ 0 \,|\, R & R/2 \,|\, R/2 \end{pmatrix} \end{array}$$

# Colombe contro falchi

La bimatrice è simmetrica, quindi basta studiare $\pi_A(\alpha)$. Ricordando quanto scritto sopra abbiamo che

$$\pi_A(\alpha) = \frac{R}{2}\left[1 - \frac{D+R}{R}\beta\right]\alpha + \frac{R}{2}(1-\beta)$$

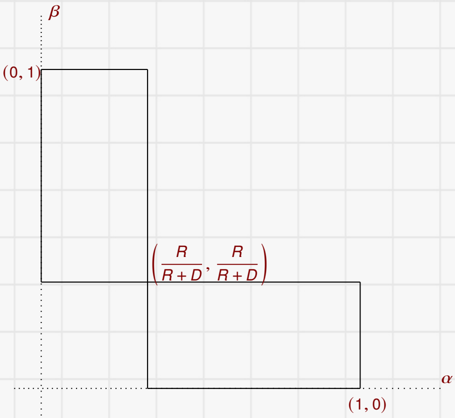
da cui segue che

$$[R-(D+R)\beta] > 0 \qquad \text{se e solo se} \qquad \beta < \frac{R}{R+D}$$

$$[R-(D+R)\beta] = 0 \qquad \text{se e solo se} \qquad \beta = \frac{R}{R+D}$$

$$[R-(D+R)\beta] < 0 \qquad \text{se e solo se} \qquad \beta > \frac{R}{R+D}$$

# Colombe contro falchi



# Colombe contro falchi: analisi dei risultati

L'equilibrio che non si trova sugli assi ha rilevanza biologica, esso fornisce una stima sulla percentuale della popolazione che adotta la strategia falco $F$.

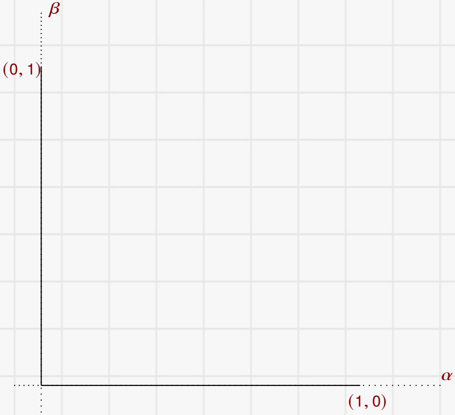
Si noti che tale percentuale è tanto più bassa quanto più il danno $D$ è grande rispetto al valore della risorsa $R$.

# Collaborare o no?

La polizia ha colto in flagrante per un reato di lieve entitá due sospettati che hanno commesso un grave reato. Durante il quarto grado la polizia offre loro l'immunità da ambo i reati nel caso di confessione completa, con la promessa di addossare interamente la responsabilità al complice. Se entrambi i furfanti confessano la pena verrà spartita tra i due criminali, se entrambi tacciono saranno condannati solo per il reato lieve. La bimatrice della situazione l̀a seguente

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \mathrm{T} & \mathrm{C} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathrm{T} \\ \mathrm{C} \end{array} & \begin{pmatrix} 1 \mid 1 & 10 \mid 0 \\ 0 \mid 10 & 5 \mid 5 \end{pmatrix} \end{array}$$

# Collaborare o no?

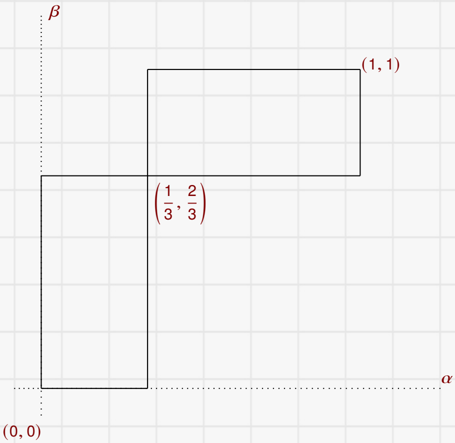


# La battaglia dei sessi

Giulietta ($A$) e Romeo ($B$) amano uscire insieme sopra ogni cosa, ma hanno i loro gusti: Romeo ama alla folla il calcio (scelta C) mentre Giulietta adora lo shopping (opzione S). Le loro aspettative possono essere riassunte nella seguente bimatrice

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \text{S} & \text{C} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{S} \\ \text{C} \end{array} & \left( \begin{array}{c|c|c} 2 & 1 \quad 0 & 0 \\ 0 & 0 \quad 1 & 2 \end{array} \right) \end{array}$$

# La battaglia dei sessi



# Grazie per l'attenzione!