Laurea triennale in INFORMATICA, Corso di **CALCOLO DELLE PROBABILITÀ**
**COMPITO SCRITTO del 23 luglio 2013 - FOGLIO RISPOSTE**

**NOME e COGNOME**________________________________________

**CANALE: L. Bertini** ☐ **G. Nappo** ☐ **VOTO:** __________

**N.B.** Mettere una croce sul canale di appartenenza, e mettere una croce sui punti risolti degli esercizi. Sbarrare gli esercizi non svolti, ad esempio: ☒ **(a)** ________ ☐ **(b)** ________
ATTENZIONE ALLE DOMANDE CON L'ASTERISCO $*$

**Esercizio 1.**

*i)* ☐ $*$ **(a)** __________ ☐ $*$ **(b)** __________

*ii)* ☐ $*$ __________

*iii)* ☐ $*$ __________

*iv)* ☐ **(a)** __________ ☐ **(b)** __________

*v)* ☐ __________

**Esercizio 2.**

*i)* ☐ $*$ __________

*ii)* ☐ $*$ __________

*iii)* ☐ __________

*iv)* ☐ __________

*v)* ☐ __________

**Esercizio 3.**

*i)* ☐ $*$ __________

*ii)* ☐ $*$ __________

*iii)* ☐ **(a)** __________ ☐ **(b)** __________

*iv)* ☐ **(a)** __________ ☐ **(b)** __________

*v)* ☐ **(a)** __________ ☐ **(b)** __________

Laurea triennale in INFORMATICA, Corso di **CALCOLO DELLE PROBABILITÀ**

Prof Bertini ☐ Prof. G. Nappo ☐ COMPITO SCRITTO DEL 23 LUGLIO 2013

NOME e COGNOME (scrivere in stampatello) ______________________________

**N.B.** Scrivere le soluzioni degli esercizi su questi fogli **giustificando** brevemente i passaggi svolti.
**ATTENZIONE: NEL CASO SI DOVESSERO USARE I COEFFICIENTI BINOMIALI, esplicitarne almeno un paio, ma non è necessario svolgere tutti i calcoli. Svolgere tutti i calcoli fino in fondo, SOLO se avete tempo.**

**Esercizio 1.** Un cassetto contiene 12 magliette: 3 nere, 4 blu e 5 marroni. Si prendono a caso (e al buio) 4 magliette dal cassetto e si mettono in una valigia. Si ponga $X_N$ la variabile aleatoria che conta il numero di magliette nere messe in valigia, e analogamente si pongano $X_B$ per il numero di magliette blu e $X_M$ per il numero di quelle marroni.
**Calcolare:**

*i)* $*$ **(a)** $\mathbb{P}(X_N = k)$ specificando per quali valori di $k$ risulta strettamente positiva, e di che tipo di distribuzione si tratta **(b)** $\mathbb{E}(X_N)$;

*ii)* $*$ la probabilità di prendere almeno una maglietta blu;

*iii)* $*$ la probabilità di prendere due magliette nere e due marroni;

*iv)* **(a)** $\mathbb{P}(X_N = 1, X_M = 2)$, **(b)** $\mathbb{P}(X_N = k | X_M = 2)$ specificando per quali valori di $k$ risulta strettamente positiva;

*v)* $\mathbb{E}(X_N | X_M = 2)$ (**suggerimento:** per evitare i calcoli, si consiglia di individuare il tipo di distribuzione di $X_N$ condizionata a $X_M = 2$).

Prof. L. Bertini ☐ Prof. G. Nappo ☐ **CALCOLO DELLE PROBABILITÀ** - 23 luglio 2013

NOME e COGNOME (scrivere in stampatello) ____________________

**N.B.** Scrivere le soluzioni degli esercizi esclusivamente su questi fogli giustificando brevemente i passaggi svolti. **È necessario svolgere tutti i calcoli fino in fondo**.

**Esercizio 2. (OBBLIGATORIO per canale BERTINI)**
Ci sono 3 urne (esternamente uguali) e ciascuna contiene 4 palline e precisamente
- la $1^a$ urna contiene 1 pallina bianca e 3 palline rosse
- la $2^a$ urna contiene 2 palline bianche e 2 palline rosse
- la $3^a$ urna contiene 3 palline bianche e 1 pallina rossa

L'urna viene scelta secondo il seguente meccanismo: si lanciano tre monete ben equilibrate e se esce esattamente 1 testa si sceglie la prima urna, se esce esattamente 1 croce si sceglie la terza urna, se invece escono tutte teste o tutte croci, si sceglie la seconda urna.

Successivamente vengono effettuate **2 estrazioni CON REINSERIMENTO dall'urna scelta (sempre la stessa)**. Siano $H_i = \{\text{viene scelta l'urna } i\}$, per $i = 1, 2, 3$, $B_k = \{\text{la } k\text{-sima pallina estratta è bianca}\}$, per $k = 1, 2$, e $C = \{\text{le due palline estratte sono di colore diverso}\}$.

*i)* $*$ Calcolare la probabilità che la prima pallina estratta sia bianca.

*ii)* $*$ **Sapendo che prima pallina estratta è bianca**, calcolare la probabilità $\alpha_1$ che l'urna scelta sia la prima, la probabilità $\alpha_2$ che l'urna scelta sia la seconda e la probabilità $\alpha_3$ che l'urna scelta sia la terza.

*iii)* **Sapendo che è stata scelta la $2^a$ urna**, calcolare la probabilità che le due palline estratte siano di colore diverso.

*iv)* Calcolare la probabilità **(non condizionata)** che le due palline estratte siano di colore diverso.

*v)* **Sapendo che** le due palline estratte sono di colore diverso, calcolare la probabilità che l'urna scelta sia la seconda.

Prof. L. Bertini ☐ Prof. G. Nappo ☐ **CALCOLO DELLE PROBABILITÀ** - 23 luglio 2013

NOME e COGNOME______________________________

**N.B.** Scrivere le soluzioni degli esercizi su questi fogli **giustificando** brevemente i passaggi svolti.
**ATTENZIONE: È necessario svolgere tutti i calcoli fino in fondo**

**Esercizio 3.** Siano $U$ e $V$ variabili aletorie, con $U$ a valori in $\{-1, 0, +1\}$ e $V$ a valori in $\{-2, 0, +2\}$. Si assuma $P(U = i, V = 0) = c$, per $i = -1, 0, +1$, $P(U = 0, V = +2) = P(U = 0, V = -2) = 0$ e $P(U = i, V = j) = c/2$, per i rimanenti valori di $(i, j)$.

*i)* ∗ Calcolare $c$, spiegando il procedimento usato per il calcolo di $c$.

*ii)* ∗ Calcolare la densità discreta di $V$ e mostrare che il suo valore atteso vale 0 e la sua varianza vale 8/5.

*iii)* **(a)** Calcolare $Cov(U, V)$. **(b)** Le variabili aleatorie $U$ e $V$ sono indipendenti?

*iv)* Calcolare **(a)** la probabilità che $UV$ sia uguale a 2 e **(b)** la probabilità che $U = 1$ **dato che** $UV = 2$.

*v)* Se $\{X_i\}_{i\geq 1}$ è una successione di variabili aleatorie (globalmente) indipendenti e tutte con la stessa legge di $V$, calcolare approssimativamente

$$\textbf{(a)} P\Big(\sum_{i=1}^{1000} X_i \leq 42\Big) \qquad \text{e} \qquad \textbf{(b)} \quad P\Big(\sum_{i=1}^{1000} X_i > -84\Big).$$