

PROGRAMMA di METODI PROBABILISTICI per l'ECONOMIA e la FINANZA 2011-12

le pagine si riferiscono agli appunti del corso

<http://www.mat.uniroma1.it/people/nappo/MPEF/GLOBALE-27-13-aprile-10-marzo-2010.pdf>

1 Cenni sul funzionamento e sulla storia dei mercati finanziari

1.1 Mercati Finanziari 2
Appendice: esempi sul tasso di interesse a tempo discreto 8
Appendice: tasso di interesse a tempo continuo 12
Appendice: Richiami sulle equazioni differenziali lineari 13
1.2 Un esempio concreto di derivato finanziario 15
1.3 Teorema dell'arbitraggio 17
1.3.1 Applicazioni 19
1.4 Il modello binomiale uniperiodale 21
1.4.1 Modello binomiale uniperiodale con contingent claim 25

(nel modello binomiale uniperiodale non abbiamo discusso l'Osservazione 1.5. e l'Osservazione 1.7.)

MODELLO BINOMIALE MULTIPERIODALE IN MODO ELEMENTARE IN CAPITOLO 1 DEGLI APPUNTI PER IL MASTER
<http://www.mat.uniroma1.it/people/nappo/MPEF/MASTER-2009.pdf> E PRECISAMENTE LA SEZIONE

1.5 Il modello binomiale multiperiodale 28

2 Richiami su spazi di probabilità

2.1 Esempi di spazi di probabilità 32
2.2 Variabili aleatorie 35
2.3 Distribuzioni di variabili aleatorie 37
2.4 Valori attesi 39
2.5 Appendice: variabili Gaussiane multidimensionali 42
2.6 NO Appendice: Spazi di variabili aleatorie 46
 2.6.1 NO Sottospazi dello spazio delle v.a.di quadrato integrabile \neq 47
 2.6.2 NO Regressione lineare 47
2.7 Appendice: Approccio soggettivista alla probabilità. 49

3 Valori attesi e probabilità condizionali

3.1 Definizioni 52
3.2 Esempi 54
3.3 Proprietà del valore atteso condizionale 61
3.4 Equivalenza tra le definizioni di valore atteso condizionale per variabili aleatorie di quadrato sommabile 63
3.5 Dimostrazioni delle proprietà del valore atteso condizionale

(SONO ESCLUSE LE DIMOSTRAZIONI DELLE PROPRIETA' DEI CONDIZIONAMENTI RIDONDANTI E DELLA CONVERGENZA)

4 Martingale

4.1 Esempi di martingale e di submartingale 74
4.2 Decomposizione di Doob 80
4.2.1 NO Applicazioni: verso l'integrale stocastico a tempo continuo *** 84
4.3 Martingale, submartingale e tempi d'arresto 90
4.3.1 NO Tempo continuo \neq 91
4.4 Alcune proprietà dei tempi d'arresto 92
4.5 Caso a tempo discreto 93
ATTENZIONE INCLUSA LA SIGMA-ALGEBRA \mathcal{F}_t E L'OPTIONAL SAMPLING THEOREM
4.6 Applicazione: la rovina del giocatore con le martingale 95
4.7 Disuguaglianza di Kolmogorov per submartingale non negative 97
4.8 NO Convergenza di martingale 97
4.9 Disuguaglianza di Doob (SOLO ENUNCIATO) 99

5 Mercato (B,S): investimenti, proprietà e caratteristiche

5.1 Struttura del mercato (B,S)	103
5.1.1 Strategia di investimento di un portfolio	104
5.1.2 Mercato scontato	107
5.2 Nozione di copertura. Prezzo superiore e inferiore.	108
5.2.1 Mercato completo e incompleto	112
5.3 Mercato senza opportunità di arbitraggio	113
5.4 Primo e Secondo Teorema Fondamentale	114
5.4.1 Sufficienza del Teorema APT1	117
5.4.2 NO Necessità del Teorema APT1: trasformazione condizionale di Esscher $\tau \neq$	119
5.5 Completezza e rappresentabilità***	123

6 Il modello di Cox Ross Rubinstein (CRR-model) 127

6.1 Caratteristiche del modello	127
6.1.1 ***Il modello CRR è arbitrage-free e completo	128
6.1.2 ***Rappresentabilità nel mercato scontato, per il modello CRR	130
6.2 Prezzi di copertura per opzioni Europee	131
6.2.1 Calcolo del prezzo di copertura per le opzioni call	134
6.3 Appendice: Alberi binomiali e modello CRR***	138

7 Il modello di Black e Scholes come limite del modello binomiale multiperiodale 145

7.1 Il Modello Binomiale Multiperiodale	145
7.1.1 Ipotesi e notazioni	145
7.2 Approssimazione del Modello Binomiale Multiperiodale	147
7.2.1 Il modello approssimato, a tempo continuo	147
7.2.2 Dimostrazione della formula di Black e Scholes	149
7.2.3 Dimostrazione alternativa della formula di Black e Scholes	155
[SI CONSIGLIA ANCHE DI GUARDARE LA DIMOSTRAZIONE ELEMENTARE NELLA NOTA 5 DI PAG.52 E 53 DEGLI APPUNTI PER IL MASTER http://www.mat.uniroma1.it/people/nappo/MPEF/MASTER-2009.pdf ATTENZIONE PERO' ALLA FINE C'E' UN ERRORE, CHE RIGUARDA IL CASO IN CUI COMPARE $p^{*n} = p^n u^n / (1+r/n)$]	
7.3 Il moto Browniano	159
7.3.1 Approssimazione del moto browniano per t fissato	159
7.3.2 Indipendenza ed omogeneità degli incrementi	161
7.3.3 Definizione del moto browniano e del modello di Black e Scholes	161

8 Processi aleatori a tempo continuo

8.4 Le traiettorie del processo di Wiener non sono a variazione limitata	174
--	-----

(Le traiettorie NON POSSONO AVERE DERIVATA)

ARGOMENTI FACOLTATIVI: CENNI SU INTEGRALE STOCASTICO, CALCOLO DELL'INTEGRALE STOCASTICO DI $\int_0^t W_u dW_u$, FORMULA DI ITO PER FUNZIONI $f(t, W_t)$ E DIFFERENZIALE STOCASTICO PER IL MOTO BROWNIANO GEOMETRICO