APPUNTI SUL PROCESSO DI POISSON

Giovanna Nappo

9 maggio 2007

1 Processi di conteggio in generale

DEFINIZIONE di PROCESSO DI CONTEGGIO.

Sia data una successione di variabili aleatorie $\{T_n; n \geq 1\}$ a valori in $\mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ e tali che

$$T_0 = 0 \leq T_1 \leq T_2 \leq ... \leq T_n \leq T_{n+1} \leq ... \qquad (1)$$

con la condizione che
se $T_{n+1} < \infty$ allora $T_n < T_{n+1}$. (2)

Si definisca

$$N_t := \sup\{n \geq 0 : \ T_n \leq t\}.$$

Il processo $\{N_t; t \geq 0\}$ è detto **PROCESSO DI CONTEGGIO**.

OSSERVAZIONE

Le condizioni (1) e (2) assicurano che N_t ha traiettorie costanti a tratti, con $N_t - N_{t^-} \in \{0, 1\}$, dove $N_{t^-} := \lim_{\substack{s \to t \\ s<t}} N_s$.

Inoltre il processo $N_t \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, ed $N_t = \infty$, se e solo se $\{n \geq 0 : \ T_n \leq t\}$ non è limitato, e cioè se converge ad infinito. Di conseguenza $\mathbb{P}\{N_t \neq \infty\} = 1$ per ogni $t > 0$, se e solo se la successione $\{T_n\}$ non converge ad un limite finito con probabilità 1, ovvero se e solo se

$$\mathbb{P}\{\lim_{n\to\infty} T_n = \infty\} = 1. \qquad (3)$$

Infatti se vale la (3) allora, qualunque sia $t > 0$, l'insieme $\{n \geq 0 \mid T_n(\omega) \leq t\}$ è limitato con probabilità 1. Viceversa se (3) non vale allora esiste un $\bar{t} > 0$ per cui $\mathbb{P}\{\lim_{n\to\infty} T_n \leq \bar{t}\} > 0$ (perché?), e quindi l'insieme degli ω per i quali $\{n \geq 0 : \ T_n(\omega) \leq \bar{t}\}$ non è limitato ha probabilità positiva.

Il problema di mostrare la (3), o, equivalentemente, che vale $\mathbb{P}\big(\{N_t \neq \infty\}\big) = 1$, è detto Problema della NON ESPLOSIONE ed un processo di conteggio per cui vale la (3) è detto non esplosivo.

Passiamo ora a considerare il più “famoso“ tra i processi di conteggio: il Processo di POISSON. Ne daremo diverse definizioni (esattamente 4) e vedremo che esse sono equivalenti.

DEFINIZIONE 1 del processo di Poisson.

Sia $\{U_n\}$ una successione di variabili aleatorie i.i.d. (indipendenti, identicamente distribuite) esponenziali di parametro λ. Siano inoltre

$$T_0 = 0,\ T_1 = U_1,\ T_2 = U_1 + U_2, ..., T_n = U_1 + U_2 + ... + U_n, ...$$

ossia in generale

$$T_0 = 0, \qquad e \qquad T_{n+1} = T_n + U_{n+1}, \qquad \text{per } n \geq 0.$$

Il processo definito da

$$N_t := \sup\{n \geq 0 :\ T_n \leq t\}$$

è detto Processo di Poisson di intensità λ.

DEFINIZIONE 2 del processo di Poisson.

Un processo di conteggio non esplosivo $\{N_t\}$ è detto Processo di Poisson di intensità λ se

1) $\mathbb{P}(N_0 = 0) = 1$

2) per ogni $t > 0$, N_t segue una legge di Poisson di parametro $\lambda\, t$, cioè:

$$\mathbb{P}(N_t = k) = \frac{(\lambda\, t)^k}{k!} \exp\{-\lambda t\}, \qquad \textit{per}\ k = 0, 1, 2, ...$$

3) il processo $\{N_t\}$ è ad incrementi indipendenti, cioè:

qualunque sia $k \geq 1$ e comunque scelti $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq .... \leq t_k$,

le variabili aleatorie N_{t_1}, $N_{t_2} - N_{t_1}$, $N_{t_3} - N_{t_2}, ..., N_{t_k} - N_{t_{k-1}}$sono indipendenti.
(si noti che per la proprietà 1) $N_{t_1} = N_{t_1} - N_0$ è un incremento)

4) il processo $\{N_t\}$ è ad incrementi omogenei (o stazionari), cioè:

qualunque sia $s > 0$ e qualunque siano t_1 e t_2,
la legge di $N_{t_1+s} - N_{t_1}$ è uguale alla legge di $N_{t_2+s} - N_{t_2}$.

DEFINIZIONE 3 del processo di Poisson.

Come la definizione 2, ma senza richiedere la proprietà 2).

DEFINIZIONE 4 del processo di Poisson.

Un processo di conteggio non esplosivo è detto processo di Poisson di intensità λ se

1) $\mathbb{P}(N_0 = 0) = 1$

2) Qualunque sia $k \geq 1$ e comunque scelti $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq .... \leq t_k$, ed $n_1 \leq n_2 \leq ... \leq n_k$, valgono due delle seguenti relazioni (e quindi tutte e tre)

$$\mathbb{P}(N_{t_k+u} - N_{t_k} = 0 \mid N_{t_i} = n_i, \quad i \leq k) = 1 - \lambda u + o(u) \quad (\text{per } u \downarrow 0)$$

$$\mathbb{P}(N_{t_k+u} - N_{t_k} = 1 \mid N_{t_i} = n_i, \quad i \leq k) = \lambda u + o(u) \quad (\text{per } u \downarrow 0)$$

$$\mathbb{P}(N_{t_k+u} - N_{t_k} \geq 2 \mid N_{t_i} = n_i, \quad i \leq k) = o(u) \quad (\text{per } u \downarrow 0)$$

3) Infine

$$\lim_{s \to t} \mathbb{P}(N_s \neq N_t) = 0$$

OSSERVAZIONI

Le proprietà 1), 2), 3) e 4) della definizione 2 permettono di calcolare le distribuzioni finito-dimensionali di $(N_t,\ t \geq 0)$ e la proprietà 3) della definizione 4 è equivalente alla continuità in probabilità[1], essendo N_t un processo a valori in $\mathbb{N}$.

PROPOSIZIONE
Le definizioni 1, 2, 3 e 4 sono equivalenti.

Prova: Notiamo innanzi tutto che tutti i processi presi in considerazione sono non esplosivi per ipotesi nelle definizioni 2, 3 e 4, e cioè $0 < T_1 < T_2 < ... < T_k < T_{k+1} < ..$, ed inoltre

$$\lim_{n \to \infty} T_n = \infty,$$

con probabilità 1.

Nella definizione 1 tali proprietà sono conseguenza delle ipotesi di indipendenza ed uguale distribuzione delle $\{U_n\}$. La proprietà di monotonia dipende dal fatto che $\mathbb{P}(U_k > 0) = 1$ per v.a. esponenziali.

Per quanto riguarda la proprietà del limite[2] basta adoperare il lemma di Borel-Cantelli[3]. Infatti, qualunque sia $\alpha > 0$

$$\{\lim_{n \to \infty} T_n = \infty\} \supseteq \{\{U_n > \alpha\} i.o.\} = \bigcap_{m \geq 1} \bigcup_{n \geq m} \{U_n > \alpha\}$$

(dove i.o.=i.s. significa *infinitely often* = *infinitamente spesso*) e

[1] Un processo $\{X_t\}_{t \geq 0}$ (a valori in $\mathbb{R}^d$) è continuo in probabilità se per ogni $t \geq 0$, e per ogni $\epsilon > 0$ si ha $\lim_{s \to t} \mathbb{P}\big(|X_t - X_s| > \epsilon\big) = 0$

[2] Osserviamo che la legge $0 - 1$ di Kolmogorov ci assicura che tale evento, appartenendo alla σ-algebra coda, ha probabilità 0 oppure 1.

[3] Questa dimostrazione è valida anche se le variabili aleatorie non sono esponenziali, ma sono identicamente distribuite. Si veda anche il problema della non esplosione sul libro di Norris [Thm 2.3.2], per una dimostrazione che utilizza il fatto che le variabili aleatorie sono esponenziali

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\{U_n > \alpha\} = +\infty.$$

Essendo gli eventi $\{U_n > \alpha\}$ indipendenti, la seconda parte del lemma di Borel Cantelli assicura che $\mathbb{P}(\bigcap_{m\geq 1} \bigcup_{n\geq m}\{U_n > \alpha\}) = 1$.

Schema della dimostrazione

DEF. 1 $\Leftrightarrow$ DEF. 2

DEF. 2 $\Rightarrow$ DEF. 3$\Rightarrow$DEF. 4 $\Rightarrow$ DEF. 2

Passiamo ora alle dimostrazioni dei vari passi

DEFINIZIONE 1 $\Rightarrow$ DEFINIZIONE 2

Prima di tutto osserviamo che

$$\{N_t \leq n\} = \{T_{n+1} > t\}$$

(infatti se $N_t \leq n$ allora non si può verificare $T_{n+1} \leq t$, mentre se $T_{n+1} > t$ allora non si può verificare che $N_t \geq n+1$)

Per mostrare la proprietà 1) di Def.2 basta osservare che

$$\{N_0 \leq 0\} = \{T_1 > 0\} = \{U_1 > 0\}$$

e che

$$\mathbb{P}\{U_1 > 0\} = 1.$$

Per mostrare la proprietà 2) di Def.2 osserviamo[4] che T_m segue una legge $\Gamma(m, \lambda)$ e che[5]

$$\mathbb{P}\{N_t \leq n\} = \mathbb{P}\{T_{n+1} > t\} = 1 - (1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{(\lambda\, t)^k}{k!} \exp\{-\lambda t\}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(\lambda\, t)^k}{k!} \exp\{-\lambda t\}$$

da cui

$$\mathbb{P}\{N_t = n\} = \mathbb{P}\{N_t \leq n\} - \mathbb{P}\{N_t \leq n-1\}$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(\lambda\, t)^k}{k!} \exp\{-\lambda t\} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda\, t)^k}{k!} \exp\{-\lambda t\} = \frac{(\lambda\, t)^n}{n!} \exp\{-\lambda t\}$$

[4] Si ricordi che la somma $Y = X_1 + X_2$ di due variabili aleatorie X_1 ed X_2 indipendenti e di distribuzione $\Gamma(\alpha_1, \lambda)$ e $\Gamma(\alpha_2, \lambda)$, ha distribuzione $\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2, \lambda)$. Inoltre si ricordi che la legge esponenziale di parametro λ è una legge gamma di parametri $\alpha = 1$ e λ

[5] Per vedere che la funzione di distribuzione di T_m è nulla per $t < 0$ e che, per $t > 0$, vale

$$\mathbb{P}\{T_m \leq t\} = 1 - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(\lambda\, t)^k}{k!} \exp\{-\lambda t\}.$$

Infatti basta derivare la somma distinguendo tra il caso $k = 0$ $(\lambda \exp\{-\lambda t\})$ e $k \geq 1$ $(-\frac{\lambda(\lambda\, t)^{k-1}}{(k-1)!} \exp\{-\lambda t\} + \frac{(\lambda\, t)^k}{k!} \lambda \exp\{-\lambda t\})$. Si vede facilmente che la derivata ha termini a segno alterno e che tutti i termini si elidono tranne il termine $\frac{(\lambda\, t)^{m-1}}{(m-1)!} \lambda \exp\{-\lambda t\} = \frac{\lambda^m\, t^{m-1}}{\Gamma(m)!} \exp\{-\lambda t\}$, che è proprio la densità di probabilità di una v.a. con distribuzione $\Gamma(m, \lambda)$.

(notare che ciò garantisce anche che per ogni t>0, $\mathbb{P}(\{\mathrm{N}_t \neq \infty\})$=1 e quindi la non esplosione)

Per mostrare le proprietà 3) e 4) di Def.2 è sufficiente mostrare che, qualunque sia $t > 0$, posto $\tilde{N}_u := N_{t+u} - N_t$, il processo $\{\tilde{N}_u\}$ ha la stessa legge di $\{N_t\}$ ed inoltre $\{\tilde{N}_u\}$ e la variabile aleatoria N_t sono indipendenti [tale proprietà viene chiamata **PROPRIETÀ di MARKOV**].

Prima di dimostrarlo, convinciamoci che ciò è sufficiente: infatti in tale caso

$$\mathbb{P}(N_t = i, N_{t+u} - N_t = j) = \mathbb{P}(N_t = i, \tilde{N}_u = j) = \mathbb{P}(N_t = i)\mathbb{P}(\tilde{N}_u = j) = \mathbb{P}(N_t = i)\mathbb{P}(N_u = j)$$

e analogamente, posto $t = t_1$ e t_0=0, si dimostra facilmente per induzione che

$$\mathbb{P}(N_{t_1} = i_1, N_{t_2} - N_{t_1} = i_2, N_{t_3} - N_{t_2} = i_3, ..., N_{t_k} - N_{t_{k-1}} = i_k) = \prod_{h=1}^{k} \frac{(\lambda(\mathrm{t}_h - \mathrm{t}_{h-1}))^h}{h!} \exp\{-\lambda(t_h - t_{h-1})\}$$

osservando che

$$\mathbb{P}(N_{t_1} = i_1, N_{t_2} - N_{t_1} = i_2, N_{t_3} - N_{t_2} = i_3, ..., N_{t_k} - N_{t_{k-1}} = i_k) \equiv$$

$$\mathbb{P}(N_{t_1} = i_1, \tilde{N}_{t_2 - t_1} = i_2, \tilde{N}_{t_3} - \tilde{N}_{t_2} = i_3, ..., \tilde{N}_{t_k} - \tilde{N}_{t_{k-1}} = i_k) =$$

(poiché N_{t_1} e $\{\tilde{N}_u\}$ sono indipendenti)

$$\mathbb{P}(N_{t_1} = i_1)\mathbb{P}(\tilde{N}_{t_2 - t_1} = i_2, \tilde{N}_{t_3} - \tilde{N}_{t_2} = i_3, ..., \tilde{N}_{t_k} - \tilde{N}_{t_{k-1}} = i_k) =$$

(poiché $\{\mathrm{N}_t\}$ e $\{\tilde{N}_u\}$ hanno la stessa legge)

$$\mathbb{P}(N_{t_1} = i_1)\mathbb{P}(N_{t_2 - t_1} = i_2, N_{t_3} - N_{t_2} = i_3, ..., N_{t_k} - N_{t_{k-1}} = i_k)$$

Occupiamoci ora di dimostrare la **PROPRIETÀ di MARKOV**, ossia che il processo $\{\tilde{N}_u\}$ ha la stessa legge di $\{N_t\}$ ed inoltre $\{\tilde{N}_u\}$ e la variabile aleatoria N_t sono indipendenti.

A questo scopo notiamo che $\{\tilde{N}_u\}$ si costruisce a partire dai tempi aleatori $\{\tilde{T}_n\}$ definiti nel seguente modo $\tilde{T}_1 = \tilde{U}_1$, $\tilde{T}_2 = \tilde{U}_1 + \tilde{U}_2$, ..., $\tilde{T}_n = \tilde{U}_1 + \cdots + \tilde{U}_n$, ..., dove

$$\begin{aligned}
\tilde{U}_1 &:= T_{N_t+1} - t, \\
\tilde{U}_2 &:= T_{N_t+2} - T_{N_t+1}, \\
&\dots \\
\tilde{U}_n &:= T_{N_t+n} - T_{N_t+n-1} \\
&\dots
\end{aligned}$$

ossia

$$\begin{aligned}
\tilde{T}_1 &:= T_{N_t+1} - t, \\
\tilde{T}_2 &:= T_{N_t+2} - t, \\
&\dots \\
\tilde{T}_n &:= T_{N_t+n} - t \\
&\dots
\end{aligned}$$

Tutti gli eventi relativi ad $\{\tilde{N}_u\}$ si possono esprimere tramite la successione $\{\tilde{T}_n\}$. Ad esempio

$$\{\tilde{N}_{t_1} = m_1, \tilde{N}_{t_2} = m_2, \tilde{N}_{t_3} = m_3, ..., \tilde{N}_{t_k} = m_k\} \equiv \bigcap_{h=1}^{k} \{\tilde{T}_{m_h} \le t_h < \tilde{T}_{m_{h+1}}\}$$

Basterà quindi mostrare che N_t e la successione $\{\tilde{T}_n\}$ sono indipendenti. A sua volta per mostrare ciò è sufficiente mostrare che, qualunque siano $n \ge 0$, $k \ge 1$, ed $s_1, ..., s_k > 0$

$$\mathbb{P}(N_t = n, \tilde{U}_1 > s_1, ..., \tilde{U}_k > s_k\} = \mathbb{P}(N_t = n) \exp\{-\lambda s_1\} \cdots \exp\{-\lambda s_k\},$$

in quanto la successione $\{\tilde{T}_n\}$ è determinata dalla successione $\{\tilde{U}_n\}$.

Ciò è sufficiente in quanto gli eventi del tipo $\{\tilde{U}_1 > s_1, ..., \tilde{U}_k > s_k\}$ formano un π-sistema[6] che genera tutta la σ-algebra degli eventi del tipo $\{(\tilde{U}_1, ..., \tilde{U}_k) \in H\}$, $H \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Cominciamo col notare che

$$\begin{aligned}
&\{N_t = n, \tilde{U}_1 > s_1, ..., \tilde{U}_k > s_k\} = \\
=&\{T_n \le t < T_{n+1}, T_{n+1} - t > s_1, T_{n+2} - T_{n+1} > s_2, ..., T_{n+k} - T_{n+k-1} > s_k\} = \\
&= \{T_n \le t < T_n + U_{n+1}, T_n + U_{n+1} - t > s_1, U_{n+2} > s_2, ..., U_{n+k} > s_k\} = \\
&= \{T_n \le t < T_n + U_{n+1}, T_n + U_{n+1} - t > s_1\} \cap \{U_{n+2} > s_2, ..., U_{n+k} > s_k\}
\end{aligned}$$

Quindi, tenendo conto dell'indipendenza della successione $\{U_m\}$ (e quindi delle variabili aleatorie T_n, U_{n+1} dalla successione $\{U_{n+\ell}\}_{\ell \ge 2}$), otteniamo che

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\{N_t = n, \tilde{U}_1 > s_1, ..., \tilde{U}_k > s_k\}) = \\
&= \mathbb{P}(\{T_n \le t < T_n + U_{n+1}, T_n + U_{n+1} - t > s_1\})\mathbb{P}(\{U_{n+2} > s_2, ..., U_{n+k} > s_k\}) \\
&= \mathbb{P}(\{T_n \le t < T_n + U_{n+1}, T_n + U_{n+1} - t > s_1\})\mathbb{P}(\{U_{n+2} > s_2) \cdots \mathbb{P}(U_{n+k} > s_k\}) = \\
&= \mathbb{P}(\{T_n \le t < T_n + U_{n+1}, T_n + U_{n+1} - t > s_1\}) \exp\{-\lambda s_2\} \cdots \exp\{-\lambda s_k\}
\end{aligned}$$

Ci rimane solo da mostrare che

$$\mathbb{P}(\{T_n \le t < T_n + U_{n+1}, T_n + U_{n+1} - t > s_1\}) = \mathbb{P}(N_t = n) \exp\{-\lambda s_1\}$$

Osserviamo che $s_1 \ge 0$ e quindi

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\{T_n \le t < T_n + U_{n+1}, T_n + U_{n+1} - t > s_1\}) = \mathbb{P}(\{T_n \le t, T_n + U_{n+1} > t, T_n + U_{n+1} > t + s_1\}) \\
&= \mathbb{P}(\{T_n \le t, T_n + U_{n+1} > t + s_1\}),
\end{aligned}$$

ed inoltre, posto $f_n(= f_{T_n})$,

$$\mathbb{P}(\{T_n \le t, U_{n+1} > t + s_1 - T_n\}) = \int_0^t f_n(s)\mathbb{P}(U_{n+1} > t + s_1 - T_n | \, T_n = s) ds.$$

Essendo T_n ed U_{n+1} indipendenti, si ha, per $s \in (0, t)$,

$$\mathbb{P}(U_{n+1} > t + s_1 - T_n | \, T_n = s) = \mathbb{P}(U_{n+1} > t + s_1 - s) = \mathbb{P}(U_{n+1} > t - s)\mathbb{P}(U_{n+1} > s_1),$$

(l'ultima uguaglianza dipende dalla proprietà di mancanza di memoria della legge esponenziale che poi equivale semplicemente a $\exp\{-\lambda(t + s_1 - s)\} = \exp\{-\lambda(t - s)\} \exp\{-\lambda s_1\}$.)

[6] La famiglia degli eventi $\{\tilde{U}_1 > s_1, ..., \tilde{U}_k > s_k\}$ al variare di $k \ge 1$ e di $s_i \ge 0$ è una famiglia di eventi con la proprietà di essere chiuso rispetto all'operazione di intersezione e che contiene l'evento certo.

Otteniamo quindi che, ricordando che $f_n(=f_{T_n})$ è la densita' di probabilità di T_n,

$$\mathbb{P}(\{T_n \le t < T_n + U_{n+1}, T_n + U_{n+1} - t > s_1\}) = \int_0^t f_n(s)\mathbb{P}(U_{n+1} > t - s)\mathbb{P}(U_{n+1} > s_1)ds$$

$$= \mathbb{P}(U_{n+1} > s_1) \int_0^t f_n(s)\mathbb{P}(U_{n+1} > t - s)ds = \exp\{-\lambda s_1\}\mathbb{P}(N_t = n)$$

L'ultima uguaglianza si ottiene facilmente calcolando l'integrale, che coincide con

$$\int_0^t f_n(s)\exp\{-\lambda(t-s)\}ds = \frac{(\lambda\, t)^n}{n!}\exp\{-\lambda t\}.$$

Alternativamente, ripetendo il ragionamento per $s_1 = 0$, è immediato convincersi che

$$\int_0^t f_n(s)\mathbb{P}(U_{n+1} > t - s)ds = \mathbb{P}(\{T_n \le t < T_n + U_{n+1}) = \mathbb{P}(N_t = n).$$

OSSERVAZIONE

Lo stesso tipo di dimostrazione, nel caso di processi di rinnovo (ossia U_i indipendenti ed identicamente distribuite) mostra che il processo $\{\tilde{N}_u\}$ è ancora un processo di rinnovo, con $\tilde{U}_i$, indipendenti per $i \ge 1$, e, con la stessa distribuzione di U_1 per $i \ge 2$, mentre $\tilde{U}_1$ ha una distribuzione diversa dalle altre:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\{\tilde{U}_1 > s_1, ..., \tilde{U}_k > s_k\}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(\{N_t = n, \tilde{U}_1 > s_1, ..., \tilde{U}_k > s_k\}) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(\{T_n \le t \le T_n + U_{n+1}, T_n + U_{n+1} - t > s_1 U_{n+2} > s_2, ..., U_{n+k} > s_k\}) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(\{T_n \le t, t + s_1 \le T_n + U_{n+1}\})\,\mathbb{P}(\{U_{n+2} > s_2\})\cdots\mathbb{P}(\{U_{n+k} > s_k\}) \\
&= \mathbb{P}(\{\tilde{U}_1 > s_1\})\,\mathbb{P}(\{U_1 > s_2\})\cdots\mathbb{P}(\{U_1 > s_k\})
\end{aligned}$$

dove, nell'ipotesi che la funzione di distribuzione G delle variabili aleatorie U_k ammetta densità g e quindi anche la variabile aleatoria T_n ammetta densità $f_n = g * \cdots * g$ (n volte la convoluzione di g)

$$\mathbb{P}(\{\tilde{U}_1 > s_1\}) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(\{T_n \le t, t + s_1 \le T_n + U_{n+1}\}) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t f_n(s)\,\overline{G}(t + s_1 - s)\,ds$$

DEFINIZIONE 2 $\Rightarrow$ DEFINIZIONE 1

Si tratta solo di trovare la distribuzione congiunta delle variabili aleatorie $\{U_n\}$.

Per ottenere ciò è sufficiente trovare la legge congiunta di $\{T_n\}$, in quanto

$$(U_1, ..., U_k) = G(T_1, ..., T_k),$$

dove

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Infatti $T_h = U_1 + \cdots U_h$, $h \geq 1$, e quindi $U_h = T_h - T_{h-1}$, $h > 1$, ed $U_1 = T_1$.

Si noti inoltre che G è la matrice inversa di

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Cominciamo col mostrare che $T_1 \equiv U_1$ ha distribuzione esponenziale di parametro λ. Infatti

$$\mathbb{P}(T_1 > t) = \mathbb{P}(N_t = 0) = \exp\{-\lambda t\}.$$

Qualunque sia $k \geq 2$, mostreremo che la distribuzione di $(T_1, ..., T_k)$ ammette densità uguale a

$$\begin{cases} f(t_1, ..., t_k) = \lambda^k \exp\{-\lambda t_k\} & \text{se } 0 < t_1 < t_2 < .... < t_k \\ \\ f(t_1, ..., t_k) = 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Per ipotesi sappiamo che la distribuzione di $(T_1, ..., T_k)$ è a supporto contenuto nell'insieme

$$A^+ = \{(t_1, ..., t_k) \text{ tali che } 0 < t_1 < t_2 < .... < t_k\}.$$

Cominciamo quindi con il considerare rettangoli contenuti in A^+ del tipo

$$(s_1, t_1] \times (s_2,\, t_2] \times \cdots \times (s_k,\, t_k],$$

con la condizione che $0 \leq s_1 < t_1 < s_2 < t_2 < .... < s_k < t_k$.

L'evento

$$\{(T_1, ..., T_k) \in (s_1,\, t_1] \times (s_2,\, t_2] \times \cdots \times (s_k,\, t_k]\}$$

coincide con l'evento

$$\{N_{s_1} = 0,\; N_{t_1} - N_{s_1} = 1,\; N_{s_2} - N_{t_1} = 0,\; N_{t_2} - N_{s_2} = 1,\; N_{s_3} - N_{t_2} = 0, \cdots, N_{t_k} - N_{s_k} \geq 1\}$$

e quindi

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}\{(T_1, ..., T_k) \in (s_1, t_1] \times (s_2, t_2] \times \cdots \times (s_k, t_k]\} \\ &= e^{-\lambda\, s_1} \lambda\, (t_1 - s_1)\, e^{-\lambda(t_1 - s_1)} e^{-\lambda(s_2 - t_1)} \lambda\, (t_2 - s_2) e^{-\lambda(t_2 - s_2)} \cdots (1 - e^{-\lambda(t_k - s_k)}) \\ &= \lambda^k e^{-\lambda t_k} \prod_{i=1}^{k} (t_i - s_i) \end{aligned}$$

È facile vedere che tale valore coincide con l'integrale di $f(v_1, ..., v_k)$ sull'insieme (iper-rettangolo) $(s_1, t_1] \times (s_2, t_2] \times \cdots \times (s_k, t_k]$.

Per il principio di inclusione-esclusione si ha la coincidenza anche su tutte le unioni di rettangoli di questo tipo contenuti in A^+. Ciò è sufficiente per garantire che f sia la densità di $(T_1, ..., T_k)$.

A questo punto si tratta di applicare la formula di trasformazione di variabili a $(U_1, ..., U_k) = G(T_1, ..., T_k)$, osservando che lo Jacobiano vale 1, per ottenere che la densità congiunta di $(U_1, ..., U_k)$ è $g(u_1, ...u_k) = \prod_{i=1}^k \lambda\, e^{-\lambda u_i}$ (per $u_i > 0$).

DEFINIZIONE 2 $\Rightarrow$ DEFINIZIONE 3 (immediata)

DEFINIZIONE 3 $\Rightarrow$ DEFINIZIONE 4

Per l'ipotesi di indipendenza e di uguale distribuzione degli incrementi su intervalli della stessa ampiezza, basta mostrare che esiste un $\lambda > 0$ per cui $\mathbb{P}(N_u = 1) = \lambda u + o(u)$ e che $\mathbb{P}(N_u \geq 2) = o(u)$.

Sia $\Phi(u) = \mathbb{P}(N_u = 0) = \mathbb{P}(U_1 > u)$, allora Φ è una funzione non crescente, $\Phi(0) = 1$, $\lim_{u\to+\infty} \Phi(u) = 0$ ed inoltre $\Phi(u + v) = \Phi(u)\Phi(v)$, infatti

$$\begin{aligned}
\Phi(u+v) &= \mathbb{P}(N_{u+v} = 0) = \mathbb{P}(N_u = 0, N_{u+v} - N_u = 0) \\
&= \mathbb{P}(N_u = 0)\mathbb{P}(N_{u+v} - N_u = 0) && \text{(per l'indipendenza degli incrementi)} \\
&= \mathbb{P}(N_u = 0)\mathbb{P}(N_v = 0) && \text{(per l'omogeneità degli incrementi)} \\
&= \Phi(u)\Phi(v).
\end{aligned}$$

Quindi necessariamente esiste un $\lambda \geq 0$ per cui $\Phi(u) = e^{-\lambda u}$. Tale λ è nullo solo nel caso banale in cui il processo di conteggio $\{N_t\}$ sia identicamente 0, caso che escludiamo per evitare casi banali.

La prova di tale fatto si basa sulle seguenti osservazioni[7]: si ponga $\Phi(1) = e^{-\lambda}$, allora dovendo essere $\Big(\Phi(\frac{1}{n})\Big)^n = \Phi(1)$ deve necessariamente valere $\Phi(\frac{1}{n}) = e^{-\lambda/n}$. Analogamente essendo $\Phi(\frac{m}{n}) = \Big(\Phi(\frac{1}{n})\Big)^m$, deve valere $\Phi(\frac{m}{n}) = e^{-\lambda m/n}$. Infine, essendo Φ non crescente, per ogni $t > 0$ ed $\frac{m}{n} \leq t \leq \frac{m'}{n'}$ deve risultare

$$\Phi(\tfrac{m'}{n'}) \leq \Phi(t) \leq \Phi(\tfrac{m}{n}).$$

La tesi si ottiene passando al limite per $\frac{m'}{n'} \downarrow t$ ed $\frac{m}{n} \uparrow t$.

Per finire la dimostrazione basta quindi mostrare che, posto $\psi(u) := \mathbb{P}(N_u \geq 2) = o(u)$ (ossia, per $u \to 0$ si ha $\psi(u)/u \to 0$), in quanto $\mathbb{P}(N_u = 1) = 1 - \mathbb{P}(N_u = 0) - \mathbb{P}(N_u \geq 2)$.

Sia $A_n = \{\exists k = 1, ..., n \text{ tale che } N_{k/n} - N_{(k-1)/n} \geq 2\}$, allora $\mathbb{P}(A_n) = 1 - \Big(1 - \psi(\frac{1}{n})\Big)^n$ e quindi

$$\frac{1}{n}\, log\Big(1 - \mathbb{P}(A_n)\Big) = \log\Big(1 - \psi(\frac{1}{n})\Big) \leq -\psi(\frac{1}{n}),$$

da cui ancora

[7] Lo stesso ragionamento dimostra anche la caratterizzazione della legge esponenziale come l'unica per cui valga la proprietà di mancanza di memoria, ovvero

se X è una v.a. a valori reali, tale che

$\mathbb{P}(X > 0) = 1$ e $\mathbb{P}(X > u + v) = \mathbb{P}(X > u)\mathbb{P}(X > v)$ per ogni $u, v > 0$

allora $X \sim EXP(\lambda)$ per un $\lambda > 0$.

$$\frac{\psi(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} \leq -\log\Big(1 - \mathbb{P}(A_n)\Big).$$

Se dimostriamo che $\mathbb{P}(A_n) \to 0$, siamo a posto: infatti allora, essendo $u \leq \frac{1}{\lfloor \frac{1}{u} \rfloor}$, ψ non decrescente ed infine $\frac{1}{u} \leq \lfloor \frac{1}{u} \rfloor + 1$

$\frac{\psi(\mathrm{u})}{u} \leq \psi(\frac{1}{\lfloor \frac{1}{u} \rfloor})\Big(\lfloor \frac{1}{u} \rfloor + 1\Big) = \psi(\frac{1}{\lfloor \frac{1}{u} \rfloor})\lfloor \frac{1}{u} \rfloor \; \Big(\lfloor \frac{1}{u} \rfloor + 1\Big)\frac{1}{\lfloor \frac{1}{u} \rfloor} \to 0 \cdot 1 = 0.$

Osserviamo ora che se

$\frac{1}{n_0(\omega)} < \min\{U_i(\omega), \text{ per } i \leq N_1\}$ (tale minimo è non nullo poiché il processo è non esplosivo)

e se $n \geq n_0(\omega)$ allora $\omega \notin A_n$. Ciò implica che definitivamente $\omega \notin A_n$ e quindi che

$\mathbb{P}(A_n \text{ i.s.}) = \mathbb{P}(\limsup_n A_n) = 0.$

Ciò a sua volta implica che $\mathbb{P}(\mathrm{A}_n) \to 0$, e quindi la tesi.
Infatti $\limsup_n A_n = \bigcap_{m \geq 1} \; \bigcup_{n \geq m} A_n = \bigcap_{m \geq 1} C_m$, dove $C_m := \; \bigcup_{n \geq m} A_n \supseteq A_m$. Quindi

$0 \leq \mathbb{P}(A_m) \leq \mathbb{P}(C_m) \to \mathbb{P}(\limsup_n A_n) = 0$ implica che $\mathbb{P}(A_m) \to 0$.

DEFINIZIONE 4 $\Rightarrow$ DEFINIZIONE 2

Per semplificare le notazioni poniamo $B = \bigcap_{i=1}^k \{N_{t_i} = n_i\}$ e sia

$p_n(t)\big(= p_n(t \mid B)\big) := \mathbb{P}(N_{t_k + t} - N_{t_k} = n \mid B)$

Dobbiamo dimostrare che

$$p_n(t)\big(= p_n(t \mid B)\big) = \frac{(\lambda\, t)^n}{n!} \exp\{-\lambda t\},$$

per $n \geq 0$ e qualunque sia B. Infatti da ciò si deduce sia che gli incrementi hanno distribuzione di Poisson, sia gli incrementi sono indipendenti[8].

Sia ora $h > 0$, allora

[8]La proprietà di indipendenza si ottiene facilmente per induzione e considerando che gli eventi del tipo B si possono scrivere immediatamente in termini degli incrementi:

$$B = \bigcap_{i=1}^k \{N_{t_i} = n_i\} = \bigcap_{i=1}^k \{N_{t_i} - N_{t_{i-1}} = n_i - n_{i-1}\},$$

con la convenzione che $t_0 = 0$ ed $n_0 = 0$.

$$
\begin{aligned}
&p_n(t+h)\big(=p_n(t+h\mid B)\big)=\sum_{m=0}^{\infty}\mathbb{P}(\{N_{t_k+t+h}-N_{t_k}=n\}\cap\{N_{t_k+t}-N_{t_k}=m\}\mid B)\\
&=\sum_{m=0}^{n}\mathbb{P}(\{N_{t_k+t+h}-N_{t_k+t}=n-m\}\mid B\cap\{N_{t_k+t}-N_{t_k}=m\})\mathbb{P}\{N_{t_k+t}-N_{t_k}=m\}\mid B)\\
&=\sum_{m=0}^{n}\mathbb{P}(\{N_{t_k+t+h}-N_{t_k+t}=n-m\}\mid B\cap\{N_{t_k+t}=m+n_k\})p_m(t)\\
&=\mathbb{P}(\{N_{t_k+t+h}-N_{t_k+t}=0\}\mid B\cap\{N_{t_k+t}=n_k\})p_n(t)\\
&+\mathbb{P}(\{N_{t_k+t+h}-N_{t_k+t}=1\}\mid B\cap\{N_{t_k+t}=1+n_k\})p_{n-1}(t) \qquad \text{(l'addendo si ha per } n\geq 1)\\
&+\sum_{m=0}^{n-2}\mathbb{P}(\{N_{t_k+t+h}-N_{t_k+t}=n-m\}\mid B\cap\{N_{t_k+t}=m+n_k\})p_m(t) \quad \text{(la somma si ha per } n\geq 2)\\
&=p_n(t)\big(1-\lambda h+o(h)\big)+p_{n-1}(t)\big(\lambda h+o(h)\big)+o(h)\\
&=p_n(t)\big(1-\lambda h\big)+p_{n-1}(t)\lambda h+o(h)\big(=p_n(t\mid B)\big(1-\lambda h\big)+p_{n-1}(t\mid B)\lambda h+o(h)\big).
\end{aligned}
$$

Ricapitolando per $h>0$,

$$\frac{p_n(t+h)-p_n(t)}{h}=-\lambda p_n(t)+\lambda p_{n-1}(t)+o(h),$$

mandando $h\downarrow 0$ si ottiene che

$$D^+p_0(t)=-\lambda p_0(t),\qquad D^+p_n(t)=-\lambda p_n(t)+\lambda p_{n-1}(t),\qquad \text{per } n\geq 1.$$

In realtà la derivata destra è una derivata, in quanto è una funzione continua, poiché (come dimostreremo ora) $p_n(t)\big(=p_n(t\mid B)\big)$ è una funzione continua[9]: $p_n(t)\big(=p_n(t\mid B)\big)$ è continua, infatti

$$
\begin{aligned}
\mid p_n(t)-p_n(s)\mid &=\frac{1}{\mathbb{P}(B)}\mid\mathbb{P}(\{N_{t_k+t}-N_{t_k}=n\}\cap B)-\mathbb{P}(\{N_{t_k+s}-N_{t_k}=n\}\cap B)\mid\leq\\
&\leq\frac{1}{\mathbb{P}(B)}\mid\mathbb{P}(\{N_{t_k+t}-N_{t_k}=n\}\cap B)\,\triangle\,(\{N_{t_k+s}-N_{t_k}=n\}\cap B)\mid\\
&\leq\frac{1}{\mathbb{P}(B)}\mid\mathbb{P}(\{N_{t_k+t}\neq N_{t_k+s}\})\mid\to 0,
\end{aligned}
$$

per ipotesi.

Considerando la condizione iniziale $p_0(0)=1$, $p_n(0)=0$, $n\geq 1$, e considerando $v_n(t):=p_n(t)e^{\lambda t}$ si ottiene il sistema

[9]In generale se f(t) è una funzione continua, che ammette derivata destra continua allora f(t) ammette derivata, nel senso che $f(t)-f(0)-\int_0^t D^+f(s)ds=:F(t)$ è identicamente nulla.
Se infatti (ad esempio) esistesse un t_0 tale che $F(t_0)<0$, posto $G(t):=F(t)-t\frac{F(t_0)}{t_0}$, si ha che ha che $G(0)=G(t_0)=0$. Notiamo che $D^+F(t)\equiv 0$, quindi $D^+G(t)\equiv-\frac{\mathrm{F(t_0)}}{\mathrm{t_0}}>0$, cosicché G deve avere un massimo in un punto $s_0\in(0,t_0)$, essendo una funzione continua (inoltre c'è qualche punto a destra di 0 in cui è positiva, altrimenti la sua derivata sarebbe negativa). Ciò provoca una contraddizione, in quanto in un punto di massimo si ha $D^+G(s_0)\leq 0$.

$$v_0'(t) = 0,\ v_n'(t) = \lambda v_{n-1}(t),\ n \geq 1;\ \ v_0(0) = 1,\ v_n(0) = 0,\ n \geq 1.$$

o meglio, in forma integrale,

$$v_0(t) = v_0(0),\ v_n(t) = v_n(0) + \int_0^t v_{n-1}(s)ds,\ n \geq 1.$$

Tale sistema non dipende da B ed ammette soluzione unica, come si dimostra facilmente per induzione:

$$v_0(t) = 1,\ v_n(t) = \frac{(\lambda\, t)^k}{k!}\ ,\ n \geq 1,$$

e quindi la tesi.

OSSERVAZIONE SULLA DEFINIZIONE DI UN PROCESSO SOLO ATTRAVERSO LE SUE DISTRIBUZIONI FINITO DIMENSIONALI.

DEFINIZIONE Dato un processo aleatorio $(X_t, t \in I)$ le distribuzioni finito-dimensionali sono la famiglia di misure

$$H \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k) \mapsto \mu_{t_1,t_2,...,t_k}(H) := \mathbb{P}\{(X_{t_1}, ..., X_{t_k}) \in H\}, \text{ al variare di } k \geq 1 \text{ e } t_1, ...t_k \in I.$$

DEFINIZIONE Due processi aleatori $(X_t, t \in I)$ e $(Y_t, t \in I)$ sullo stesso spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ si dicono stocasticamente equivalenti se

$$\mathbb{P}(X_t(w) = Y_t(\omega)) = 1 \text{ per ogni } t \in I.$$

(Si dice anche che $(Y_t, t \in I)$ è una versione di $(X_t, t \in I)$)

OSSERVAZIONE

Due processi stocasticamente equivalenti hanno le stesse distribuzioni finito-dimensionali. Infatti

$$\mathbb{P}\{(X_{t_1}, ..., X_{t_k}) \in H\} =$$

$$= \mathbb{P}(\{(X_{t_1}, ..., X_{t_k}) \in H\} \cap \bigcap_{i=1}^{k} \{X_{t_i} = Y_{t_i}\}) + \mathbb{P}(\{(X_{t_1}, ..., X_{t_k}) \in H\} \cap \Big(\bigcap_{i=1}^{k} \{X_{t_i} = Y_{t_i}\}\Big)^c) =$$

$$= \mathbb{P}(\{(Y_{t_1}, ..., Y_{t_k}) \in H\} \cap \bigcap_{i=1}^{k} \{X_{t_i} = Y_{t_i}\}) = \mathbb{P}(\{(Y_{t_1}, ..., Y_{t_k}) \in H\})$$

in quanto

$$\mathbb{P}(\Big(\bigcap_{i=1}^{k} \{X_{t_i} = Y_{t_i}\}\Big)^c) = \mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{k} \{X_{t_i} = Y_{t_i}\}^c) \leq \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(\{X_{t_i} = Y_{t_i}\}^c) = 0.$$

Come abbiamo già notato, le proprietà 1) 2) 3) e 4) della definizione 2 del processo di Poisson permettono di trovare tutte le distribuzioni finito-dimensionali del processo. In alcuni testi viene detto processo di Poisson ogni processo con queste distribuzioni finito-dimensionali. Ciò però non permette di affermare che si tratti di un processo di conteggio. Daremo ora un esempio di processo che ha le stesse distribuzioni finito-dimensionali di N_t, ma le cui traiettorie non sono le tipiche traiettorie di un processo di conteggio, ovvero non sono costanti a tratti, non decrescenti, continue a destra e con salti di ampiezza unitaria.

Si definisca

$$M_t(w) := N_t(\omega) + f(t + U_1(\omega))$$

dove

$$\begin{cases} f(s) = 1 & \text{per } s \in \mathbb{Q} \\ f(s) = 0 & \text{per } s \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Essendo $M_t(w) \neq N_t(\omega)$ se e solo se $f(t + U_1(\omega)) = 1$ ovvero se e solo se $t + U_1(\omega) \in \mathbb{Q}$ ed inoltre

$$\mathbb{P}(t + U_1(\omega) \in \mathbb{Q}) = \sum_{r \in \mathbb{Q}} \mathbb{P}(U_1(\omega) = r - t) = 0$$

per ogni t si ha che

$$\mathbb{P}(M_t(\omega) = N_t(\omega)) = 1 \text{ per ogni } t \geq 0.$$

Di conseguenza i due processi hanno le stesse distribuzioni finito dimensionali, ma il secondo non è un processo si conteggio, in quanto ad esempio le traiettorie non sono funzioni non decrescenti.

ALCUNI ESERCIZI

ESERCIZIO 1) Sia $t > 0$, e siano $U_t = T_{N_t+1} - t$ e $V_t = t - T_{N_t}$, rispettivamente il tempo fino al prossimo evento e il tempo trascorso dall'ultimo evento in un processo di Poisson. Mostrare che U_t e V_t sono indipendenti e che U_t ha legge esponenziale di parametro λ, mentre V_t ha la stessa legge di $X \wedge t$, dove X ha legge esponenziale di parametro λ.

ESERCIZIO 2) Posto $L_t = U_t + V_t$ la lunghezza dell'intervallo tra due arrivi contenente t,
a) trovare la densità di L_t,
b) mostrare che $\mathbb{E}[L_t]$ converge a $2\mathbb{E}[U_1] = \frac{2}{\lambda}$, per $t \to \infty$.

COMMENTO: Nell'interpretazione dei tempi di salto come tempi di guasto (e quindi di sostituzione di pezzi che si guastano), la variabile aleatoria $V_t = t - T_{N_t}$ si può interpretare come l'età del pezzo in uso al tempo t (alcuni autori si riferiscono ad V_t come il *tempo di vita corrente* (*current life time*) al tempo t e la indicano con C_t. Invece la variabile $U_t = T_{N_t+1} - t$ rappresenta il *tempo di vita residua*[10] al tempo t, ossia il tempo che ancora rimane fino al guasto del pezzo in uso al tempo t.

Il punto b) può sembrare paradossale in quanto L_t è uno degli intervalli U_n. Una spiegazione di ciò risiede nella proprietà di mancanza di memoria della distribuzione esponenziale. Una interpretazione famosa è quella per cui se andate alla fermata nell'istante t allora il valore atteso del tempo fra l'arrivo del prossimo autobus e l'arrivo dell'autobus precedente è circa il doppio del tempo medio di un intervallo tra l'arrivo dell'n-simo autobus e l'$(n+1)$-esimo (qualunque sia n). Ecco una spiegazione euristica di tale fatto: è più probabile capitare in intervalli lunghi che in intervalli brevi....

SOLUZIONI DEGLI ESERCIZI

ESERCIZIO 1) Siano u e v due numeri reali strettamente positivi, allora basta mostrare che

$$\mathbb{P}(U_t > u,\, V_t > v) = 0 \qquad \text{per } v > t$$

$$\mathbb{P}(U_t > u, V_t > v) = \mathbb{P}(T_{N_t+1} - t > u, t - T_{N_t} > v) e^{-\lambda(u+v)} = \qquad \text{per } v \le t.$$

Dalle precedenti relazioni (che dimostriamo qui sotto) si possono facilmente ricavare le distribuzioni marginali ed ottenere l'indipendenza[11].

[10]ATTENZIONE: la notazione R_t sarebbe preferibile, in quanto U_t può condurre il lettore distratto a confondersi (almeno quando t è un numero intero) con le variabili che individuano gli intertempi $T_{n+1} - T_n$.

[11]Equivalentemente basta osservare che

$$\mathbb{P}(Y > u,\, X \wedge t > v) = \mathbb{P}(Y > u, X > v, t > v) = 0 \qquad \text{per } v \ge t$$

$$\mathbb{P}(Y > u, X \wedge t > v) = \mathbb{P}(Y > u, X > v, t > v) = \mathbb{P}(Y > u, X > v) = e^{-\lambda(u+v)} = \qquad \text{per } v < t.$$

Infatti, tenendo conto che $V_t \leq t$, la prima uguaglianza è ovvia, mentre, per $v \leq t$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T_{N_t+1} - t > u, t - T_{N_t} > v) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(T_{N_t+1} - t > u, t - T_{N_t} > v, N_t = n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(T_{n+1} - t > u, t - T_n > v, N_t = n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(T_{n+1} - t > u, t - T_n > v, T_n \leq t < T_{n+1}) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(T_{n+1} > t + u, T_n < t - v, T_n \leq t < T_{n+1}) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(T_{n+1} > t + u, T_n < t - v) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(T_n + U_{n+1} > t + u, T_n < t - v) \\
&= \mathbb{P}(U_1 > t + u) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{t-v} \mathbb{P}(U_{n+1} > t + u - s) f_{T_n}(s) ds \\
&= \mathbb{P}(U_1 > u)\mathbb{P}(U_1 > t) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{t-v} \mathbb{P}(U_1 > u)\mathbb{P}(U_{n+1} > t - s) f_{T_n}(s) ds \\
&= \mathbb{P}(U_1 > u) \left(\mathbb{P}(U_1 > t) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{t-v} \mathbb{P}(U_{n+1} > t - s) f_{T_n}(s) ds \right) \\
&= \mathbb{P}(U_1 > u)\mathbb{P}(U_t > 0,\, V_t > v) = \mathbb{P}(U_1 > u)\mathbb{P}(V_t > v) = e^{-\lambda(u+v)}
\end{aligned}$$

Nelle precedenti uguaglianze abbiamo sfruttato la proprietà di mancanza di memoria di una esponenziale (cioè di U_1) e il fatto che per calcolare $\mathbb{P}(U_t > 0,\, V_t > v)$ si può ripetere il calcolo effettuato con 0 al posto di u. Infine l'ultima uguaglianza deriva dal fatto che

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(U_1 > t) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{t-v} \mathbb{P}(U_{n+1} > t - s) f_{T_n}(s) ds \\
&= e^{-\lambda t} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{t-v} e^{-\lambda t} e^{+\lambda s} \lambda^n \frac{s^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda s} ds \\
&= e^{-\lambda t} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{t-v} \lambda^n \frac{s^{n-1}}{(n-1)!} ds \right) \\
&= e^{-\lambda t} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \frac{(t-v)^n}{n!} \right) \\
&= e^{-\lambda t}\, e^{\lambda(t-v)} = e^{-\lambda v}
\end{aligned}$$

ESERCIZIO 2

a) Alla luce dell'esercizio precedente si tratta solo di calcolare, date due variabili aleatorie X ed Y indipendenti ed esponenziali di parametro λ, la legge della somma $(X \wedge t) + Y$ e notare che

$$\mathbb{P}((X \wedge t) + Y \leq s) = \int_0^s dv \int_0^v f_X(u) f_Y(v-u) du \qquad (se\ s < t)$$

$$\mathbb{P}((X \wedge t) + Y \leq s) = \int_0^t dv \int_0^v f_X(u) f_Y(v-u) du + \mathbb{P}(X \geq t)\mathbb{P}(Y \leq s-t) \qquad (se\ s \geq t)$$

dai calcoli si ottiene facilmente il risultato.

DA TERMINARE [a cura del lettore]

b) Per calcolare $\mathbb{E}[X \wedge t]$ basta tenere presente che

$$\mathbb{E}[X \wedge t] = \int_0^t s\lambda e^{-\lambda s}\, ds + t\mathbb{P}(X > t)$$

DA TERMINARE [a cura del lettore]

ALTRO ESERCIZIO:
3) Mostrare che

$$\mathbb{E}[T_{N_t}] = t - \frac{1}{\lambda}\left(1 - e^{-\lambda t}\right)$$

SOLUZIONE:

Se $N_t = n$, allora $T_{N_t} = T_n$ ed inoltre $\{N_t = n\} = \{T_n \leq t < T_{n+1} = T_n + U_{n+1}\}$ e quindi

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[T_{N_t}] &= \mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{N_t = n\}} T_n\right] = \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{T_n \leq t < T_n + U_{n+1}\}} T_n\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\{T_n \leq t < T_n + U_{n+1}\}} T_n\right].
\end{aligned}$$

Tenendo conto che

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\{T_n \leq t < T_n + U_{n+1}\}} T_n\right] &= \int_0^t f_{T_n}(s)\mathbb{P}(U_{n+1} > t - s)\, s\, ds \\
&= \int_0^t \frac{s^{n-1}\lambda^n}{(n-1)!}\, e^{-\lambda s}\, e^{-\lambda (t-s)}\, s\, ds \\
&= \int_0^t \frac{s^n \lambda^n}{(n-1)!}\, e^{-\lambda t}\, ds = e^{-\lambda t}\, \frac{t^{n+1}\lambda^n}{(n-1)!\,(n+1)} \\
&= e^{-\lambda t}\, \frac{n}{\lambda}\, \frac{(t\lambda)^{n+1}}{(n+1)!} \\
&= \frac{n}{\lambda}\mathbb{P}(N_t = n+1)
\end{aligned}$$

possiamo riscrivere

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[T_{N_t}] &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\{T_n \le t < T_n + U_{n+1}\}} T_n\right] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\lambda} \mathbb{P}(N_t = n+1) \\
&= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k-1}{\lambda} \mathbb{P}(N_t = k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k-1}{\lambda} \mathbb{P}(N_t = k)
\end{aligned}$$

in quanto per $k = 1$ ovviamente $k - 1 = 0$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{\lambda} \mathbb{P}(N_t = k) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda} \mathbb{P}(N_t = k) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{\lambda} \mathbb{P}(N_t = k) - \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda} \mathbb{P}(N_t = k) - \frac{1}{\lambda} \mathbb{P}(N_t = 0) \right) \\
&= \frac{1}{\lambda}\, \mathbb{E}[N_t] - \left(1 - e^{-\lambda\, t}\right) = t - \frac{1}{\lambda} \left(1 - e^{-\lambda\, t}\right)
\end{aligned}$$

2 Il processo di Poisson come limite della passeggiata aleatoria riscalata

2.1 Passeggiata aleatoria riscalata

L'idea è la seguente: si consideri una successione di eventi $A_k^{(n)}$ che rappresentano gli esiti di prove indipendenti, di probabilità $\mathbb{P}(A_k^{(n)}) = p^{(n)} = \frac{\lambda}{n}$. Si denoti, come è usuale,

$$S_m^{(n)} = \sum_{k=1}^{m} \mathbf{1}_{A_k^{(n)}}$$

la passeggiata aleatoria corrispondente, ovvero la variabile aleatoria che conta il numero di successi nelle prime n prove.

Si supponga che ogni prova venga effettuata ad intervalli di ampiezza $\frac{1}{n}$. In questo modo per ogni $t \in [0,\infty)$, il numero di prove effettuate nell'intervallo $[0,t]$ è la parte intera inferiore[12] di nt, cioè $\lfloor nt \rfloor$. Di conseguenza il numero di successi nell'intervallo $[0,t]$ è la variabile aleatoria $S_h^{(n)}$, con $h = \lfloor nt \rfloor$, o meglio

$$N^{(n)}(t) = S_{\lfloor nt \rfloor}^{(n)}.$$

2.2 Legge limite

Come primo problema ci interessa trovare la legge di $N^{(n)}(t) = S_{\lfloor nt \rfloor}^{(n)}$ e quale è il suo limite.

È chiaro che $N^{(n)}(t) = S_{\lfloor nt \rfloor}^{(n)}$ segue una legge binomiale $Bin(\lfloor nt \rfloor, p^{(n)})$, per $t > 0$ ed è $N^{(n)}(0) = 0$ per $t = 0$.

Tenendo presente che

$$p^{(n)} = \frac{\lambda}{n} = \frac{\lambda t}{nt}\frac{\lfloor nt \rfloor}{\lfloor nt \rfloor} = \frac{\lambda t}{\lfloor nt \rfloor}\frac{\lfloor nt \rfloor}{nt}, \qquad \text{per } t > 0$$

e che $\frac{\lfloor nt \rfloor}{nt}$ converge ad 1 per n che tende ad infinito[13], si intuisce che la legge limite deve essere una legge di Poisson di parametro λt.

Per dimostrarlo formalmente si consideri la funzione caratteristica di $N^{(n)}(t) = S_{\lfloor nt \rfloor}^{(n)}$

$$\varphi_N^{(n)}(t)(u) = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{iuN^{(n)}(t)}] = \Big(p^{(n)}\mathrm{e}^{iu} + (1 - p^{(n)})\Big)^{\lfloor nt \rfloor} = \left(\frac{\lambda}{n}\mathrm{e}^{iu} + (1 - \frac{\lambda}{n})\right)^{n\frac{\lfloor nt \rfloor}{n}},$$

da cui, poiché $\frac{\lfloor nt \rfloor}{n}$ converge a t per $n \to \infty$, si vede facilmente che

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_N^{(n)}(t)(u) = \lim_{n\to\infty} \left[\left(1 + \frac{\lambda(\mathrm{e}^{iu} - 1)}{n}\right)^n\right]^{\frac{\lfloor nt \rfloor}{n}} = \exp\{\lambda t(\mathrm{e}^{iu} - 1)\}.$$

La dimostrazione[14] è quindi ottenuta, ricordando che una variabile aleatoria N di Poisson, con parametro μ ammette come funzione caratteristica

$$\varphi_N(u) = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{iuN}] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{e}^{iuk}\frac{\mu^k}{k!}\mathrm{e}^{-\mu} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{e}^{iu}\mu)^k}{k!}\mathrm{e}^{-\mu} = \exp\{\mu(\mathrm{e}^{iu} - 1)\}.$$

---

[12] Si ricordi che, per ogni numero reale a, $\lfloor a \rfloor = h$ se e solo se $h \leq a < h + 1$

[13] Più in generale infatti $\frac{\lfloor a \rfloor}{a}$ converge ad 1 per a che tende ad infinito: $|\frac{\lfloor a \rfloor}{a} - 1| = |\frac{\lfloor a \rfloor - a}{a}| \leq \frac{1}{a} \to 0$

[14] La precedente dimostrazione, con piccole modifiche, si ripete per dimostrare con le funzioni caratteristiche il Teorema di approssimazione di Poisson, cioè che la legge $Bin(n, \frac{\mu}{n})$ converge ad una legge di Poisson di parametro μ.

2.3 Indipendenza degli incrementi

Si osservi che, per ogni n, se si considera un intervallo $(t_1, t_2]$, il numero di successi nell'intervallo $(t_1, t_2]$ coincide con $N^{(n)}(t_2) - N^{(n)}(t_1)$.

La variabile aleatoria $N^{(n)}(t_2) - N^{(n)}(t_1)$ si chiama anche incremento di $N^{(n)}(t)$ nell'intervallo $(t_1, t_2]$.

La sua distribuzione è binomiale di parametri $\lfloor nt_2 \rfloor - \lfloor nt_1 \rfloor$ e in modo analogo si dimostra che $N^{(n)}(t_2) - N^{(n)}(t_1)$ converge in legge ad una variabile di Poisson di parametro $\lambda(t_2 - t_1)$.

Si osservi anche che se si considerano due intervalli disgiunti $(0, t_1]$ e $(t_1, t_2]$, allora il numero di successi nell'intervallo $(0, t_1]$, cioè $N^{(n)}(t_1)$, ed il numero di successi nell'intervallo $(t_1, t_2]$, cioè $N^{(n)}(t_2) - N^{(n)}(t_1)$, sono variabili aleatorie indipendenti, in quanto dipendono da eventi indipendenti[15].

La precedente proprietà si generalizza al caso di più intervalli ovvero, per intervalli disgiunti $(0, t_1]$, $(t_1, t_2]$, $\ldots$, $(t_{m-1}, t_m]$, gli incrementi negli intervalli $(t_{i-1}, t_i]$, cioè le variabili aleatorie $M_i = N^{(n)}(t_i) - N^{(n)}(t_{i-1})$, per $i = 1, \ldots, m$, sono variabili aleatorie indipendenti.

2.4 Tempo di primo successo e sua legge limite

Si consideri ora la variabile aleatoria $T^{(n)} = \frac{X^{(n)}}{n}$ dove $X^{(n)}$ è il tempo di primo successo nelle prove di Bernoulli $A_k^{(n)}$, per $k \geq 1$, e quindi è una variabile aleatoria geometrica di parametro $\frac{\lambda}{n}$.

Si dimostra facilmente che $T^{(n)}$ converge in legge (cioè in distribuzione) ad una variabile aleatoria esponenziale di parametro λ.

Infatti, se X è una variabile aleatoria geometrica di parametro p, allora la sua funzione caratteristica è

$$\begin{aligned}
\varphi_X(u) = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{iuX}] &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{e}^{iuk}(1-p)^{k-1}p \\
&= \mathrm{e}^{iu}p \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{e}^{iu(k-1)}(1-p)^{k-1} = \mathrm{e}^{iu}p \sum_{k=1}^{\infty} [\mathrm{e}^{iu}(1-p)]^{k-1} \\
&= \mathrm{e}^{iu} \frac{p}{1 - \mathrm{e}^{iu}(1-p)}.
\end{aligned}$$

Di conseguenza

$$\begin{aligned}
\varphi_T^{(n)}(u) = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{iuT^{(n)}}] &= \mathbb{E}[\mathrm{e}^{iu\frac{X^{(n)}}{n}}] = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{i\frac{u}{n}}X^{(n)}] = \varphi_X(\frac{u}{n}) \\
&= \mathrm{e}^{i\frac{u}{n}} \frac{\lambda}{n\left(1 - \mathrm{e}^{i\frac{u}{n}}(1 - \frac{\lambda}{n})\right)}.
\end{aligned}$$

Poiché $\mathrm{e}^{i\frac{u}{n}}$ converge ad 1 per $n \to \infty$, e più precisamente $\mathrm{e}^{i\frac{u}{n}} = 1 + i\frac{u}{n} + O(\frac{1}{n^2})$, si ottiene

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \varphi_T^{(n)}(u) &= \lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{i\frac{u}{n}} \lim_{n\to\infty} \frac{\lambda}{n\left(1 - \mathrm{e}^{i\frac{u}{n}}(1 - \frac{\lambda}{n})\right)} \\
&= 1 \lim_{n\to\infty} \frac{\lambda}{n\left(1 - \left(1 + i\frac{u}{n} + O(\frac{1}{n^2})\right)(1 - \frac{\lambda}{n})\right)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\lambda}{\left(-iu - nO(\frac{1}{n^2}) + \lambda + iu\frac{\lambda}{n} + \lambda O(\frac{1}{n^2})\right)} \\
&= \frac{\lambda}{\lambda - iu}.
\end{aligned}$$

[15] Vale infatti: $N^{(n)}(t_1)$ dipende dagli eventi $A_k^{(n)}$, per $k \leq \lfloor nt_1 \rfloor$, mentre $N^{(n)}(t_2) - N^{(n)}(t_1)$ dipende dagli eventi $A_k^{(n)}$, per $\lfloor nt_1 \rfloor < k \leq \lfloor nt_2 \rfloor$

La convergenza è quindi provata tenendo conto che per una variabile aleatoria $Z \sim \mathrm{EXP}(\lambda)$

$$\varphi_Z(u) = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{iuZ}] = \frac{\lambda}{\lambda - iu}.$$

Ciò e deriva da un fatto più generale: la legge $\mathrm{EXP}(\lambda) = \Gamma(1, \lambda)$ e per una $Z \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$ si ha

$$\varphi_Z(u) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - iu}\right)^\alpha.$$

Infatti

$$\begin{aligned}
\varphi_Z(u) = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{iuZ}] &= \int_0^\infty \mathrm{e}^{iux} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \mathrm{e}^{-\lambda x} dx \\
&= \frac{\lambda^\alpha}{(\lambda - iu)^\alpha} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty (\lambda - iu)^\alpha x^{\alpha-1} \mathrm{e}^{-(\lambda - iu)x} dx \\
&= \frac{\lambda^\alpha}{(\lambda - iu)^\alpha} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty (\lambda x - iux)^{\alpha-1} \mathrm{e}^{-(\lambda - iu)x} d(\lambda - iu)x \\
&= \frac{\lambda^\alpha}{(\lambda - iu)^\alpha} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{r(t,\lambda)} z^{\alpha-1} \mathrm{e}^{-z} dz \\
&\qquad \text{(l'integrale è esteso alla semiretta } r(t, \lambda) = \{z = \lambda x - iux, \text{ per } x > 0\} \\
&\qquad \text{e vale } \Gamma(\alpha) \text{, come si può ottenere dal Teorema dei residui)} \\
&= \left(\frac{\lambda}{\lambda - iu}\right)^\alpha.
\end{aligned}$$

La convergenza in legge di $T^{(n)} = \frac{X^{(n)}}{n}$ ad una variabile esponenziale $Z \sim \mathrm{EXP}(\lambda)$ si può dimostrare anche direttamente:

$$\lim_{n \to \infty} F_{T^{(n)}}(x) = F_Z(x),$$

in questo caso la convergenza deve valere per ogni x in quanto $F_Z(x)$ è una funzione continua:

$$\begin{cases} F_Z(x) = 0 & \text{per } x < 0, \\ F_Z(x) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{per } x \geq 0. \end{cases}$$

Per $x < 0$ si ha $F_{T^{(n)}}(x) = F_Z(x) = 0$, e lo stesso vale per $x = 0$, mentre per $x > 0$ è equivalente dimostrare che

$$\lim_{n \to \infty} 1 - F_{T^{(n)}}(x) = 1 - F_Z(x) = \mathrm{e}^{-\lambda x}.$$

Si osservi che, per $x > 0$

$$\begin{aligned}
1 - F_{T^{(n)}}(x) = \mathbb{P}(T^{(n)} > x) = \mathbb{P}(\frac{X^{(n)}}{n} > x) &= \mathbb{P}(X^{(n)} > nx) = \mathbb{P}(X^{(n)} > \lfloor nx \rfloor) \\
&= (1 - p(n))^{\lfloor nx \rfloor} = \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{\lfloor nx \rfloor} = \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n \frac{\lfloor nx \rfloor}{n}} = \mathrm{e}^{-\lambda x}.
\end{aligned}$$