Esercizi su Catene di Markov

M. Isopi e G. Nappo

Fare almeno uno tra gli esercizi 1 e 2, l'esercizio 3, almeno uno tra gli esercizi 4 e 5 almeno uno tra gli esercizi 6, 7 e 8, ed almeno uno tra gli esercizi 9 e 10.

Inoltre fare gli esercizi del Norris 1.1.7, 1.5.2, 1.8.3 (suggerimento considerare la successione $Y_n :=_{mod 13} X_n$ e mostrare che è una catena di Markov, Completare l'Esempio 1.4.4 e fare l'esercizio 1.10.3.

1. Un'urna contiene inizialmente due palline rosse e due palline nere. Due giocatori, A e B, effettuano delle estrazioni successive con le regole seguenti.

Se la pallina estratta è nera, essa viene messa da parte. Se è rossa essa viene rimessa nell'urna insieme a una nuova pallina nera. Il giocatore A vince non appena nell'urna ci sono quattro palline nere, B vince non appena nell'urna non ci sono più palline nere.

Calcolare la probabilità che A vinca.

2. Una catena di Markov sull'insieme $S = \{1, 2, 3\}$ ha matrice di transizione

$$\begin{pmatrix} 0 & 1-2^{-k} & 2^{-k} \\ 1-2^{-k} & 0 & 2^{-k} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dove k è un intero positivo.

- Classificare gli stati della catena.
- Trovare la distribuzione di equilibrio.
- Detto T il tempo di primo arrivo nello stato 3 partendo dallo stato 1, calcolare che la distribuzione di T e $\mathbf{E}(T)$.
- Trovare la legge limite di $\frac{T}{\mathbf{E}(T)}$ quando $k \to \infty$. (suggerimento: utilizzare il fatto che, per $x > 0$, si ha $\mathbf{P}(T > x) = \mathbf{P}(T > \lfloor x \rfloor)$, dove $\lfloor x \rfloor$ è la parte intera inferiore di x e che $\lim_{v\to\infty}(1 - \frac{1}{v})^v = \lim_{u\to 0}(1 - u)^{\frac{1}{u}} = e^{-1}$)
- ***** Sia $(\alpha, 1 - \alpha, 0)$ la distribuzione iniziale. Mostrare che la legge limite sopra trovata è la stessa per ogni $\alpha \in (0, 1)$.

3. Sia P la matrice delle probabilità di transizione dell'esercizio 1.2.1 del Norris, ovvero $p_{1,1} = p_{1,5} = p_{2,2} = p_{2,4} = p_{5,1} = p_{5,5} = \frac{1}{2}$, $p_{3,3} = 1$, $p_{4,2} = p_{4,3} = p_{4,4} = p_{4,5} = \frac{1}{4}$.

- individuare le classi comunicanti e le classi chiuse
- individuare gli stati transitori e gli stati ricorrenti
- individuare le distribuzioni invarianti
- partendo da 4, calcolare la probabilità di raggiungere (in un tempo finito) l'insieme $\{1, 5\}$ e la probabilità di raggiungere (in un tempo finito) lo stato 3

4. Consideriamo la catena di Markov avente come stati gli N vertici di un poligono regolare, con la regola seguente: il processo si sposta, ad ogni passo, sul vertice adiacente in senso orario con probabilità p, su quello adiacente in senso antiorario con probabilità q, mentre resta sul vertice in cui si trova con probabilità $r = 1 - p - q$.

- Scrivere la matrice di transizione per $N = 6$.
- Mostrare che se almeno uno dei numeri p e q è strettamente positivo, allora la catena è irriducibile.
- Detto T il tempo di primo arrivo nello stato 3 partendo dallo stato 1, calcolare $\mathbf{E}(T)$.
- Calcolare la distribuzione invariante della catena.

5. Due coccinelle si trovano inizialmente sui vertici opposti di un ottagono regolare di lati di lunghezza unitaria. Ad ogni istante ciascuna di esse si sposta, a caso e indipendentemente dall'altra, su uno dei due vertici adiacenti a quello su cui essa si trova. Indichiamo con D_n la distanza che le separa all'istante n.

- trovare la legge di D_1
- * mostrare che la successione D_n forma una catena di Markov
- scrivere la matrice delle probabilità di transizione
- trovarne la distribuzione invariante
- calcolare il valore atteso del tempo necessario affinché le due coccinelle si trovino per la prima volta sullo stesso vertice

6. Sia $\{X_n\}$ una catena di Markov con spazio degli stati $S = \{1, 2, 3\}$, probabilità di transizione $p_{1,2} = p_{2,3} = p_{3,1} = \frac{2}{3}$ e $p_{1,3} = p_{2,1} = p_{3,2} = \frac{1}{3}$ e vettore iniziale delle probabilità $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$.

- Calcolare $P(X_0 = 1, X_2 = 3)$, $P(X_0 + X_2 = 4)$ e
  $P(X_0 = 1, X_2 = 3 | X_0 + X_2 = 4)$.

- Calcolare la legge invariante (cioè il vettore di probabilità invariante). Perché possiamo dire che la legge invariante è unica anche prima di eseguire il calcolo? Esistono stati periodici? La matrice è regolare? (cioè, esiste un $\overline{n}$ tale che qualunque sia $n \geq \overline{n}$ si abbia $p_{i,j}^{(n)} > 0$ per ogni i e j.)
- Calcolare quanto vale per $n \to \infty$

$$P(X_n + X_{n+2} = 4)$$

7. Sia $\{X_n\}$ una catena di Markov con spazio degli stati $\{0, 1, 2, 3\}$ e con le seguenti probabilità di transizione

$$p_{0,0} = 1, p_{1,0} = \frac{1}{4}, p_{1,2} = \frac{3}{4}, p_{2,0} = \frac{1}{8}, p_{2,1} = \frac{1}{8}, p_{2,3} = \frac{3}{4}, p_{3,3} = 1,$$

Lo stato iniziale è scelto a caso.

- Disegnare il grafo, individuare gli stati transienti e ricorrenti e calcolare la distribuzione X_2.
- Calcolare la distribuzione congiunta di (X_2, X_3) e $\mathbf{E}(X_2 X_3)$.
- Calcolare la probabilità di assorbimento nello stato 0 e quella nello stato 3 (cioè $\mathbf{P}(H^A < \infty)$ per $A = \{0\}$ e per $A = \{3\}$).

8. Sia $\{X_n\}$ la catena di Markov che modella il seguente meccanismo: in un buffer possono stare al massimo tre programmi, ciascun programma nel buffer può essere terminato in una unità di tempo con probabilità $p = \frac{1}{2}$, indipendentemente dagli altri programmi e da quanto accaduto in precedenza, e inoltre, alla fine di ogni unità di tempo, entra di sicuro nel buffer esattamente un altro programma, purchè il buffer non sia al massimo. La catena X_n rappresenta il numero di programmi nel buffer dopo quest'ultima operazione. Supponiamo che all'istante iniziale il buffer sia pieno.

- Calcolare la matrice delle probabilità di transizione.
- Mostrare la regolarità della matrice delle probabilità di transizione e calcolare approssimativamente la distribuzione di X_{2000}.
- Calcolare $\mathbf{P}(X_1 = 1 | X_3 = 1)$.

9. Ogni anno Elena sceglie di passare le sue vacanze estive in una delle seguenti località: o in Austria (A) o alle Baleari (B) o a Cuba (C), ma ogni anno sceglie di andare in una località diversa da quella dell'anno precedente. Elena ha preparato 10 biglietti riportanti il nome di una località: Austria è scritto su 2 biglietti, Baleari su 3 e Cuba su 5. Ogni anno Elena pone in una scatola tutti i biglietti col nome di una località non visitata l'estate precedente e ne estrae uno alla volta. Elena decide di andare nella località indicata dal terzo biglietto estratto.

Si indichi con X_n la località visitata l'n-esimo anno; si ha che $\{X_n\}$ è una catena di Markov omogenea.

- Scrivere la matrice di transizione della catena.
- Disegnare il grafo della catena.
- Classificare gli stati della catena.
- Trovare la distribuzione stazionaria se esiste.

10. Esemplari di un certo articolo vengono richiesti settimanalmente in un negozio secondo la seguente legge:

$$p_0 = 0.5 \quad p_1 = 0.3 \quad p_2 = 0.2$$

dove $p_k = \mathbf{P}(k$ articoli sono richiesti in una settimana.

Durante il fine settimana le scorte di tale prodotto sono (eventualmente) ricostruite secondo la seguente politica: 2 nuovi articoli sono acquisiti nel caso di esaurimento delle scorte, mentre nessun nuovo articolo è acquisito se vi sono ancora scorte nel negozio. Al tempo iniziale sono presenti 2 articoli in magazzino.

Si indichi con X_n il numero di articoli presenti nel negozio alla fine dell'n-esima settimana **prima** che nuovi articoli siano eventualmente ordinati; allora X_n costituisce una catena di Markov omogenea.

- Scrivere la matrice di transizione della catena.
- Disegnare il grafo della catena.
- Trovare la distribuzione stazionaria se esiste.
- Calcolare il valore atteso del tempo che bisogna attendere finché, alla fine della settimana, vi sia un articolo in magazzino.