PROVA D'ESAME - 20 marzo 2001 nome: ____________________

cognome: ____________________

SSIS-INDIRIZZO MATEMATICA E MATEMATICA APPLICATA (secondo anno)

MATEMATICA APPLICATA B: CALCOLO DELLE PROBABILITÀ

Per le domande a risposta aperta il punteggio varia da 0 a 3, mentre per le domande a risposta multipla il punteggio è: risposta esatta +3; mancata risposta 0; risposta sbagliata -1.

ESERCIZIO A

Al gioco del lotto scommettete puntando sull'ambo $\{1, 2\}$ e sul terno $\{11, 12, 13\}$ entrambi sulla ruota di Napoli. Sia $q = \mathbb{P}\{\text{vincere entrambe le scommesse}\}$ e sia $p = \mathbb{P}\{\text{vincere almeno una delle due scommesse}\}$, allora:

DOMANDA 1: mettere una croce sulla affermazione esatta

1. ☐ $q = \Big((5 \cdot 4 \cdot 3)/(90 \cdot 89 \cdot 88)\Big)\Big((5 \cdot 4)/(90 \cdot 89)\Big)$

2. ☒ $q = \binom{5}{5}\binom{85}{0}/\binom{90}{5}$

3. ☐ $q = \binom{3}{3}\binom{87}{2}/\binom{90}{5})+\binom{2}{2}\binom{87}{3}/\binom{90}{5}-[\binom{3}{3}\binom{87}{2}/\binom{90}{5}]\,[\binom{2}{2}\binom{87}{3}/\binom{90}{5}]$

4. ☐ $q = (5 \cdot 4 \cdot 3)/(90 \cdot 89 \cdot 88) + (5 \cdot 4)/(90 \cdot 89)$

COMMENTO:

La probabilità di ottenere sia l'ambo $\{1, 2\}$ che il terno $\{11, 12, 13\}$, giocati ENTRAMBI sulla ruota di Napoli è uguale alla probabilità che esca la cinquina $\{1, 2, 11, 12, 13\}$.
Si noti che se E è l'evento "*ottenere l'ambo* $\{1, 2\}$ *sulla ruota di Napoli*" ed F è l'evento "*ottenere il terno* $\{11, 12, 13\}$ *sulla ruota di Napoli*", allora E ed F NON sono indipendenti.

DOMANDA 2: mettere una croce sulla affermazione esatta

1. ☐ $p = (5 \cdot 4 \cdot 3)/(90 \cdot 89 \cdot 88) + (5 \cdot 4)/(90 \cdot 89)$

2. ☐ $p = (5 \cdot 4 \cdot 3)/(90 \cdot 89 \cdot 88) + (5 \cdot 4)/(90 \cdot 89) - \Big((5 \cdot 4 \cdot 3)/(90 \cdot 89 \cdot 88)\Big)\Big((5 \cdot 4)/(90 \cdot 89)\Big)$

3. ☒ $p = \binom{3}{3}\binom{87}{2}/\binom{90}{5} + \binom{2}{2}\binom{87}{3})/\binom{90}{5} - \binom{5}{5}\binom{85}{0})/\binom{90}{5}$

4. ☐ $p = 1 - \Big(1 - \binom{3}{3}\binom{87}{2}/\binom{90}{5}\Big)\Big(1 - \binom{2}{2}\binom{87}{3}/\binom{90}{5}\Big)$

COMMENTO:

Posti E e F come sopra, la probabilità di "*ottenere l'ambo* $\{1, 2\}$ *sulla ruota di Napoli o di ottenere il terno* $\{11, 12, 13\}$ *sulla ruota di Napoli*" si può calcolare con

$$\boxed{Pr(E \cup F) = Pr(E) + Pr(F) - Pr(E \cap F)},$$

tenendo presente che in questo caso $Pr(E \cap F) = q$ (come in domanda 1. punto 2) che $Pr(E) = \binom{2}{2}\binom{87}{3}/\binom{90}{5}$, e che $Pr(F) = \binom{3}{3}\binom{87}{2}/\binom{90}{5}$.

Si noti che in questo caso non conviene procedere utilizzando la formula

$$\boxed{Pr(A \cup B) = 1 - Pr(A^c \cap B^c)}$$

in quanto non risulta particolarmente agevole calcolare $Pr(E^c \cap F^c)$.

ESERCIZIO B

Si danno 5 carte da un mazzo ben mescolato di 52 carte (13 cuori, 13 quadri, 13 fiori, 13 picche). La probabilità p di un full servito, cioè di avere un tris e una coppia è:

1. ☐ $p = \binom{13}{2} \binom{4}{2} \binom{4}{2} \binom{44}{1} / \binom{52}{5}$

2. ☒ $p = 13 \cdot 12 \binom{4}{2} \binom{4}{2} \binom{44}{1} / \binom{52}{5}$

3. ☐ $p = \binom{4}{2} \binom{4}{2} \binom{44}{1} / \binom{52}{5}$

4. ☐ $p = 2 \cdot 13 \binom{4}{2} \binom{48}{3} \ / \binom{52}{5} \ -13 \cdot 12 \binom{4}{2} \binom{4}{2} \binom{44}{1} \ / \ \binom{52}{5}$

COMMENTO:

La probabilità di un tris di Assi e di una coppia di Re è $\binom{4}{3} \binom{4}{2} \binom{44}{0} / \binom{52}{5}$ in quanto corrisponde all'estrazione SENZA REINSERIMENTO di 5 palline tra 52 di cui 4 bianche (i 4 Assi), 4 rosse (i 4 Re) e 44 verdi (le rimanenti); lo stesso vale per ogni altro tipo di full.
I tipi di full sono $13 \cdot 12$ in quanto posso scegliere in 13 modi il valore comune delle tre carte del tris e in 12 modi il valore comune delle due carte della coppia, e quindi in questo caso l'ordine ha importanza.

ESERCIZIO C

Una prima urna contiene 6 palline rosse e 2 bianche. Una seconda urna contiene 5 palline rosse e 3 bianche. Si lancia un dado e si sceglie l'urna 1 se escono 5 o 6 e la seconda altrimenti.
Successivamente, dall'urna scelta (SEMPRE LA STESSA) vengono estratte le palline ad una ad una CON REINSERIMENTO.

Siano $\begin{cases} U \text{ l'evento } \{\textit{viene scelta l'urna } 1\} \\ V \text{ l'evento } \{\textit{viene scelta l'urna } 2\}. \end{cases}$

Siano $\begin{cases} R_n \text{ gli eventi } \{\textit{all'estrazione } n\textit{-sima viene estratta una pallina rossa}\} \\ B_n \text{ gli eventi } \{\textit{all'estrazione } n\textit{-sima viene estratta una pallina bianca}\}. \end{cases}$

Sia X_m il numero di palline rosse estratte nelle prime m estrazioni.
Sia T il numero di estrazioni necessarie per ottenere per la prima volta una pallina rossa.

DOMANDA 1: mettere una croce sulla affermazione esatta

1. ☐ $Pr(B_1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{8} + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{3}$ $\qquad Pr(B_2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{7} + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{7} = \frac{5}{21}$

2. ☒ $Pr(B_1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{8} + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{3}$ $\qquad Pr(B_2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{8} + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{3}$

3. ☐ $Pr(B_1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{8} + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{3}$ $\qquad Pr(B_2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{7} + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{1}{12}$

4. □ $Pr(B_1) = \frac{2}{8}$ $\qquad$ $Pr(B_2) = \frac{2}{8}$

COMMENTO:
$Pr(B_1) = Pr(U)Pr(B_1|U) + Pr(V)Pr(B_1|V) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{8} + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{3}$, inoltre $Pr(B_1) = Pr(B_2)$ in quanto $\begin{cases} Pr(B_2) &= Pr(U)Pr(B_2|U) + Pr(V)Pr(B_2|V) \\ Pr(B_2|U) &= Pr(B_1|U) \text{ e } Pr(B_2|V) = Pr(B_1|V) \end{cases}$

DOMANDA 2 : mettere una croce sulla colonna relativa alle risposte giuste (v=VERO f=FALSO)

$a)$	$Pr(R_1 \cap R_2|U) = Pr(R_1|U)Pr(R_2|U)$	v	v	f	f
$b)$	$Pr(R_1 \cap R_2) = Pr(R_1)Pr(R_2)$	v	f	v	f
		1.□	**2.**⊠	**3.**□	**4.** □

COMMENTO:

$a)$ Condizionatamente ad U, cioè a conoscere la composizione dell'urna, si tratta di estrazioni CON REINSERIMENTO e quindi $Pr(R_1 \cap R_2|U) = Pr(R_1|U)Pr(R_2|U)$.

$b)$
$$Pr(R_1 \cap R_2) = Pr(U)Pr(R_1 \cap R_2|U) + Pr(V)Pr(R_1 \cap R_2|V)$$
e quindi per il punto precedente
$$Pr(R_1 \cap R_2) = Pr(U)Pr(R_1|U)Pr(R_2|U) + Pr(V)Pr(R_1|V)Pr(R_2|V)$$
che è diverso da
$$Pr(R_1)Pr(R_2) = \Big(Pr(U)Pr(R_1|U)+Pr(V)Pr(R_1|V)\Big)\Big(Pr(U)Pr(R_2|U)+Pr(V)Pr(R_2|V)\Big)$$

DOMANDA 3: Sapendo che la prima pallina estratta è rossa, la probabilità che sia stata scelta l'urna 1 è:

1. ⊠ $\frac{3}{8}$ $\qquad$ **2.** □ $\frac{2}{8}$ $\qquad$ **3.** □ $\frac{1}{3}$ $\qquad$ **4.** □ $\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{8}$

COMMENTO:
La soluzione è immediata con la formula di Bayes:
$$Pr(U|R_1) = \frac{Pr(U)Pr(R_1|U)}{Pr(U)Pr(R_1|U) + Pr(V)Pr(R_1|V)}$$
$$= \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{6}{8}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{6}{8} + \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{8}} = \frac{1 \cdot 6}{1 \cdot 6 + 2 \cdot 5} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}.$$

DOMANDA 4 : mettere una croce sulla colonna relativa alle risposte giuste (v=VERO f=FALSO)

$a)$	gli eventi $\{X_2 = 0\}$ e $\{T = 1\}$ sono indipendenti	v	v	f	f
$b)$	gli eventi $\{X_2=0\}$ e $\{T=1\}$ sono incompatibili	v	f	v	f
		1.□	**2.**□	**3.**□	**4.**⊠

COMMENTO:

Gli eventi $\{X_2 = 0\} = B_1 \cap B_2$ e $\{T = 1\} = R_1$ sono disgiunti (ovvero incompatibili) e hanno probabilità positiva: quindi non possono essere indipendenti, in quanto in generale se $Pr(A) > 0$, $Pr(B) > 0$ e $A \cap B = \emptyset$ allora $0 = Pr(A \cap B) \neq Pr(A)Pr(B) > 0$.

****
ATTENZIONE QUESTA DOMANDA NON ERA PRESENTE NELLA FORMULAZIONE ORIGINARIA DELLA PROVA
****

DOMANDA 4bis: Calcolare, **sapendo che** $X_2 = 0$, la probabilità che sia stata scelta l'urna 1. (indicare i passaggi effettuati, semplificare i calcoli effettuati)

COMMENTO:

Si osservi che $\{X_2 = 0\} = B_1 \cap B_2$, quindi

$$Pr(U|X_2 = 0) = Pr(U|B_1 \cap B_2) = \frac{Pr(U)Pr(B_1 \cap B_2|U)}{Pr(U)Pr(B_1 \cap B_2|U) + Pr(V)Pr(B_1 \cap B_2|V)}.$$

Condizionatamente all'evento U si ha $Pr(B_1 \cap B_2|U) = \frac{2}{8} \cdot \frac{2}{8}$: essendo nota la composizione dell'urna (2 palline bianche e 6 rosse), si tratta della probabilità di ottenere due palline bianche da estrazioni CON REINSERIMENTO.

Analogamente se si condiziona all'evento V si ha $Pr(B_1 \cap B_2|V) = \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{8}$: essendo la composizione dell'urna nota (3 palline bianche e 5 rosse) e le estrazioni CON REINSERIMENTO.

Quindi

$$Pr(U|X_2 = 0) = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{8} \cdot \frac{2}{8}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{8} \cdot \frac{2}{8} + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{8}} = \frac{2 \cdot 2}{2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{2}{2 + 3 \cdot 3} = \frac{2}{11}$$

ESERCIZIO D

Una prima urna contiene 6 palline rosse e 2 bianche. Una seconda urna contiene 5 palline rosse e 3 bianche. Si lancia un dado e si sceglie l'urna 1 se escono 5 o 6 e la seconda altrimenti.
Successivamente, si estrae una pallina dall'urna scelta, se ne osserva il colore e poi NON VIENE REINSERITA nell'urna.
Si ripete l'operazione una seconda volta, cioè si lancia di nuovo il dado e si sceglie un'urna etc., poi l'operazione viene ripetuta una terza volta e così via.

Siano $\begin{cases} U_n \text{ gli eventi } \{\textit{viene scelta l'urna } 1 \textit{ per l'estrazione } n\textit{-sima}\} \\ V_n \text{ gli eventi } \{\textit{viene scelta l'urna } 2 \textit{ per l'estrazione } n\textit{-sima}\}. \end{cases}$

Siano $\begin{cases} R_n \text{ gli eventi } \{\textit{all'estrazione } n\textit{-sima viene estratta una pallina rossa}\} \\ B_n \text{ gli eventi } \{\textit{all'estrazione } n\textit{-sima viene estratta una pallina bianca}\}. \end{cases}$

Sia X_m il numero di palline rosse estratte nelle prime m estrazioni.

DOMANDA 1: Disegnare il grafo associato al problema.
****

da sistemare
****

DOMANDA 2
Utilizzando il grafo, indicare come calcolare la probabilità che $X_2 = 2$ (non si richiedono i calcoli espliciti, ma solo l'indicazione dello svolgimento)

L'evento $\{X_2 = 2\}$ coincide con l'evento $R_1 \cap R_2$. Quindi

$Pr(X_2 = 2) = Pr(R_1 \cap R_2)$. Tenendo conto di tutte e quattro le possibilità relative alle scelte delle urne, cioè $U_1 \cap U_2$, $U_1 \cap V_2$, $V_1 \cap U_2$, $V_1 \cap V_2$, si ottiene che

$$\begin{aligned}
Pr(X_2 = 2) &= Pr(U_1 \cap R_1 \cap U_2 \cap R_2) + Pr(U_1 \cap R_1 \cap V_2 \cap R_2) \\
&\quad + Pr(V_1 \cap R_1 \cap U_2 \cap R_2) + Pr(V_1 \cap R_1 \cap V_2 \cap R_2) = \\
&= Pr(U_1)Pr(R_1|U_1)Pr(U_2|U_1 \cap R_1)Pr(R_2|U_1 \cap R_1 \cap U_2) \\
&\quad + Pr(U_1)Pr(R_1|U_1)Pr(V_2|U_1 \cap R_1)Pr(R_2|U_1 \cap R_1 \cap V_2) \\
&\quad + Pr(V_1)Pr(R_1|V_1)Pr(U_2|V_1 \cap R_1)Pr(R_2|V_1 \cap R_1 \cap U_2) \\
&\quad + Pr(V_1)Pr(R_1|V_1)Pr(V_2|V_1 \cap R_1)Pr(R_2|V_1 \cap R_1 \cap V_2) \\
&= Pr(U_1)Pr(R_1|U_1)Pr(U_2)Pr(R_2|U_2) \\
&\quad + Pr(U_1)Pr(R_1|U_1)Pr(V_2)Pr(R_2|V_2) \\
&\quad + Pr(V_1)Pr(R_1|V_1)Pr(U_2)Pr(R_2|U_2) \\
&\quad + Pr(V_1)Pr(R_1|V_1)Pr(V_2)Pr(R_2|V_2).
\end{aligned}$$

Quindi

$$Pr(X_2 = 2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{6}{8} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{7} + \frac{1}{3} \cdot \frac{6}{8} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{8} + \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{6}{8} + \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{7}$$

come del resto si può vedere bene dal grafo.