

NOME e COGNOME _____

CANALE: G. Nappo VOTO: _____

N.B. Scrivere le risposte dei vari punti degli esercizi
oppure, in mancanza di tempo e/o di spazio, mettere una croce sui punti risolti degli esercizi.

Esercizio 1.

i) _____

ii) _____

iii) _____

iv) _____

v) _____

Esercizio 2.

i) _____

ii) _____

iii) _____

iv) _____

v) _____

Esercizio 3.

i) _____

ii) _____

iii) _____

iv) _____

v) _____

N.B. Scrivere le soluzioni degli esercizi su questi fogli **giustificando** brevemente i passaggi svolti.

ATTENZIONE: Svolgere tutti i calcoli fino in fondo, **SOLO** se avete tempo.

NOME e COGNOME _____

Esercizio 1. Il giuoco del *poker* consiste in una scelta casuale di 5 carte da un mazzo di 52 carte (diviso in 4 semi con 13 carte per seme).

- i)* Supponendo di scegliere le 5 carte contemporaneamente (ovvero non si distingue l'ordine), calcolare il numero di possibili scelte. Se invece si distinguesse l'ordine quante sarebbero?
- ii)* Calcolare la probabilità di avere *poker d'assi* (tra le 5 carte scelte ci sono i 4 assi).
- iii)* Calcolare la probabilità che le 5 carte scelte siano tutte dello stesso seme.
- iv)* Calcolare la probabilità di avere *scala reale*, ovvero le 5 carte scelte sono tutte dello stesso seme e sono una delle successioni 1, 2, 3, 4, 5; 2, 3, 4, 5, 6; ... ; 9, 10, 11, 12, 13; 10, 11, 12, 13, 1.
- v)* Sapendo che le 5 carte scelte sono tutte dello stesso seme, calcolare la probabilità di avere *scala reale*.

N.B. Scrivere le soluzioni degli esercizi su questi fogli **giustificando** brevemente i passaggi svolti.

NOME e COGNOME _____

Esercizio 2. Una parete artificiale per l'arrampicata sportiva è composta da m settori di difficoltà crescente. Un arrampicatore ha probabilità $p \in (0, 1)$ di superare il primo settore. Inoltre, se supera il $(k - 1)$ -simo settore, con $2 \leq k \leq m$, ha probabilità p^k di superare il settore successivo (ovviamente, se non ha superato il $(k - 1)$ -simo settore, non ha superato nemmeno il k -simo).

(IN ALTERNATIVA: invece di m generico e $p \in (0, 1)$, si consideri $m = 3$ e $p = 2/3$)

- i)* Si dimostri, per induzione su $k = 1, 2, \dots, m$, che la probabilità che l'arrampicatore superi il k -simo settore è $p^{k(k+1)/2}$. **(IN ALTERNATIVA: si calcoli per $k = 1, 2, 3$ la probabilità che l'arrampicatore superi il k -simo settore).**
- ii)* Calcolare la probabilità che l'arrampicatore cada nel k -simo settore, cioè che superi il settore $(k - 1)$ -simo ma non il k -simo.
- iii)* Sapendo che l'arrampicatore non ha superato l'intera parete, calcolare la probabilità che sia caduto nel k -simo settore.

Si consideri ora il caso di una parete con $m = 3$ settori e $p = 2/3$. L'arrampicatore esegue n tentativi di scalata. Assumendo indipendenza tra i diversi tentativi, si denoti con Z_n il numero di volte che l'arrampicatore completa la parete senza cadere.

- iv)* Utilizzando la disuguaglianza di Chebyshev, trovare una limitazione inferiore per $\mathbb{P}\left(Z_n > \mathbb{E}(Z_n) - \frac{n}{10}\right)$.
- v)* Si determinino dei valori di n per cui la precedente probabilità è almeno $9/10$.

N.B. Scrivere le soluzioni degli esercizi su questi fogli **giustificando** brevemente i passaggi svolti.
I calcoli vanno svolti fino in fondo.

NOME e COGNOME _____

Esercizio 3.

Siano X ed Y variabili aleatorie con la seguente densità discreta congiunta

$Y \backslash X$	-1	0	1
0	$\frac{1}{9}$	0	$\frac{1}{9}$
1	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	0
2	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$
3	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$

- i)* Calcolare la densità discreta marginale di X , e calcolare la densità discreta marginale di Y .
- ii)* Dimostrare che X e Y NON sono variabili indipendenti.
- iii)* Dimostrare che il valore atteso e la varianza di $|XY|$ valgono: $E[|XY|] = \frac{8}{9}$ e $Var(|XY|) = \frac{98}{81}$.
- iv)* Calcolare la densità discreta di $Z = |XY|$
- v)* Calcolare la densità discreta di X condizionata a $Z = 0$.