

Scrivere su ogni foglio NOME e COGNOME.

Le risposte devono essere giustificate e riportate nel foglio RISPOSTE.

**ESERCIZIO 1.** Siano  $A, B, C$  eventi indipendenti che hanno tutti probabilità  $\frac{1}{2}$  e siano

$$D = (A \cap B) \cup (A^c \cap B^c), E = (B \cap C) \cup (B^c \cap C^c), F = (A \cap C) \cup (A^c \cap C^c).$$

- a1) Calcolare  $P(D)$ .
- a2) Determinare se gli eventi  $D, E$  sono indipendenti.
- b1) Calcolare  $P(E \cap D \cap F)$ .
- b2) Gli eventi  $D, E, F$  sono una famiglia di eventi mutuamente indipendenti?
- c1) Determinare la probabilità dell'evento  $D \cup E$ .
- c2) Sapendo che si è verificato l'evento  $D \cup E$ , determinare la probabilità di  $A$ .

**ESERCIZIO 2.** Siano  $X$  e  $Y$  gli esiti del lancio di due dadi indipendenti e sia  $S = X + Y$  la loro somma.

- a1) Determinare la legge congiunta di  $X$  e  $S$  (che tipo di distribuzione è?).
- a2) Determinare la legge di  $X$  condizionata a  $S = s, s = 2, \dots, 12$ .  
(che tipo di distribuzioni sono?)
- b) Determinare  $E(X|S = s)$  e verificare che  $E(X) = E(E(X|S))$ .
- c) Determinare la retta di regressione di  $X$  rispetto a  $S$ .

**ESERCIZIO 3.** Si sa che un pesticida elimina il 99% degli insetti di un certo tipo e il 95% delle sue uova. Supponiamo che un animale sia infestato da 100 insetti e da 200 uova e che ciascun insetto e ciascun uovo reagisca al trattamento in modo indipendente. Si considerino le variabili aleatorie  $X = \text{"numero di insetti che sopravvivono al trattamento"}$  e  $Y = \text{"numero di uova che sopravvivono al trattamento"}$ .

- a1) Si individuino le distribuzioni marginali di  $X$  e di  $Y$ .
- a2) Si individui la distribuzione congiunta di  $X$  e  $Y$ .
- b1) Scrivere l'espressione della probabilità dell'evento  $A = \{\text{il trattamento riesce a eliminare tutti gli insetti e tutte le uova}\}$ .  
Si considera che l'animale è stato disinfestato se alla fine del trattamento rimane al più un solo insetto oppure un solo uovo (un insetto da solo non riesce a riprodursi).
- b2) Scrivere l'espressione della probabilità dell'evento  $D = \{\text{alla fine del trattamento l'animale è stato disinfestato}\}$ .
- c1) **(FACOLTATIVO)** Trovare il valore approssimato della probabilità dell'evento  $A$ .
- c2) **(FACOLTATIVO)** Trovare il valore approssimato della probabilità dell'evento  $D$ .

**ESERCIZIO 4.** Siano  $X_i, i = 1, 2, \dots$  le variabili indicatrici dell'uscita di testa in lanci ripetuti indipendenti di una moneta equa. Si definiscano le variabili:  $T = \text{"numero di teste uscite prima di osservare la prima croce"}$  e  $V = \text{"numero dei lanci effettuati prima di osservare (per la prima volta) una croce e una testa consecutive"}$  (esclusi i lanci relativi alla croce e alla testa consecutive).

- a1) Per  $j = 0, 1, 2, \dots$ , scrivere l'evento  $\{T = j\}$ , utilizzando le variabili  $X_i$ , e determinare la legge di  $T$ .
- a2) Per  $j, n = 0, 1, 2, \dots$  scrivere l'evento  $\{T = j\} \cap \{V = n\}$  utilizzando le variabili  $X_i$ , specificando per quali valori di  $j$  e  $n$  questo evento risulta vuoto.
- b1) Determinare la legge congiunta di  $(T, V)$ .
- b2) Determinare la legge congiunta di  $(T, V - T)$ .

NOME.....

COGNOME.....

**ESERCIZIO 1.**

a1)  $P(D) = \dots\dots\dots$

a2) Gli eventi  $D, E$  sono indipendenti? SI      NO.

b1)  $P(E \cap D \cap F) = \dots\dots\dots$

b2) Gli eventi  $D, E, F$  sono una famiglia di eventi mutuamente indipendenti? SI      NO.

c1)  $P(D \cup E) = \dots\dots\dots$

c2) Sapendo che si è verificato l'evento  $D \cup E$ , la probabilità di  $A$  è .....

**ESERCIZIO 2.**

a1)  $P(X = h, S = s) = \dots\dots\dots$  per  $h = \dots\dots\dots$  e  $s = \dots\dots\dots$

.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....

a2) La legge di  $X$  condizionata a  $S = s, s = 2, \dots, 12$

.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....

b)  $E(X|S = s) = \dots\dots\dots$ ;

.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....

verifica di  $E(X) = E(E(X|S))$  effettuata : SI      NO.

c) retta di regressione di  $X$  rispetto a  $S$ :

.....  
.....  
.....

**ESERCIZIO 3.**

**a1)** La distribuzione marginale di  $X$  è:

.....  
.....  
.....

La distribuzione marginale di  $Y$  è:

.....  
.....  
.....

**a2)** La distribuzione congiunta di  $X$  e  $Y$  è:

.....  
.....  
.....

**b1)**  $P(A) =$  .....

**b2)**  $P(D) =$  .....

**c1) (FACOLTATIVO)**  $P(A) \cong$  .....

**c2) (FACOLTATIVO)**  $P(D) \cong$  .....

**ESERCIZIO 4.**

**a1)**  $\{T = j\} =$ .....  $P(T = j) =$ ..... per  $j =$ .....

**a2)**  $\{T = j\} \cap \{V = n\} =$ ....., per  $j, n$  tali che .....

$\{T = j\} \cap \{V = n\} = \emptyset$ , per  $j, n$  tali che .....

**b1)** La legge congiunta di  $(T, V)$ :

.....  
.....  
.....

**b2)** La legge congiunta di  $(T, V - T)$ :

.....  
.....  
.....

**c1)**  $E(V) =$ .....

**c2)** La legge marginale di  $V$

.....  
.....  
.....