CORSO DI CALCOLO DELLE PROBABILITÀ - ESAME del 9/09/2002
I anno - Laurea Triennale in Matematica - (Prof. Nappo e Prof. Piccioni)

Scrivere su ogni foglio NOME e COGNOME, Le risposte devono essere giustificate e riportate nel foglio RISPOSTE.

ESERCIZIO 1. Sia $\alpha \in (0, 1/2)$ e siano X e Y due variabili aleatorie di Bernoulli (cioè che assumono solo i valori 0 e 1), con distribuzione congiunta

$$p_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \alpha x + \left(\frac{1}{2} - \alpha\right) & \text{se } x, y \in \{0, 1\}, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

a1) Verificare che $p_{X,Y}$ individua una distribuzione congiunta.
a2) Calcolare i parametri delle due variabili X e Y.
b1) Calcolare $Cov(X, Y)$ e studiarne il segno in funzione di α.
b2) Trovare la retta di regressione.
c1) Posto $U = min(X, Y)$ e $V = Max(X, Y)$, calcolare la distribuzione congiunta di U e di V.
c2) Calcolare le distribuzioni marginali di U e di V.

ESERCIZIO 2. Una prima urna contiene n monete eque, mentre una seconda urna (esternamente identica alla prima urna) contiene m monete eque ed $n - m$ monete truccate ($0 < m < n$). Si denoti con p la probabilità che esca testa, per ciascuna moneta truccata.
Viene scelta un'urna a caso e da essa viene estratta una moneta, che viene lanciata.
a1) Calcolare la probabilità dell'evento $E_1 = \{$*al primo lancio esce testa*$\}$.
a2) Sapendo che è uscita testa nel primo lancio, calcolare la probabilità dell'evento $A = \{$ *è stata scelta la prima urna*$\}$ e dell'evento $B = \{$ *è stata scelta la seconda urna*$\}$.
b1) Calcolare la probabilità dell'evento $E_2 = \{$*al secondo lancio esce testa* $\}$.
b2) Sapendo che è uscita testa nel primo lancio della moneta estratta, calcolare la probabilità dell'evento E_2. Gli eventi E_1 ed E_2 sono indipendenti?
c) Sapendo che è uscita testa sia nel primo che nel secondo lancio, calcolare la probabilità dell'evento A e dell'evento B.

ESERCIZIO 3. Si sa che un pesticida elimina il 99% degli insetti di un certo tipo e il 95% delle sue uova. Supponiamo che un animale sia infestato da 100 insetti e da 200 uova e che ciascun insetto e ciascun uovo reagisca al trattamento in modo indipendente.
a) Scrivere l'espressione della probabilità che il trattamento riesca a eliminare tutti gli insetti e tutte le uova.

Si considerino le variabili aleatorie X="numero di insetti che sopravvivono al trattamento" e Y="numero di uova che sopravvivono al trattamento".
b1) Si trovi la distribuzione di X. **b2)** Si trovi la distribuzione di Y.
b3) Si trovi la distribuzione congiunta di X e Y.

Si considera che l'animale è stato disinfestato se alla fine del trattamento rimane al più un solo insetto oppure un solo uovo (un insetto da solo non riesce e riprodursi).
c1) Scrivere l'espressione della probabilità dell'evento $D = \{$*alla fine del trattamento l'animale sia stato disinfestato*$\}$.
(**Suggerimento**: scrivere l'evento in termini delle v.a. X e Y)
c2) Trovare il valore approssimato della probabilità dell'evento D.

ESERCIZIO 4. Si ricorda che al gioco del lotto ci sono 10 ruote e che per ciascuna ruota vengono estratti, senza reinserimento, 5 numeri da un'urna che contiene 90 palline numerate da 1 a 90.
a) Calcolare la probabilità α che il numero 1 esca in una estrazione del lotto sulla ruota di Roma.
b) Trovare l'espressione della probabilità β che il numero 1 esca (in almeno una ruota), in una estrazione del lotto.
c) Scrivere l'espressione della probabilità γ che, nelle prossime 100 estrazioni, il numero 1 esca, sulla ruota di Roma, almeno 12 volte.
d) Usando il teorema centrale del limite, calcolare approssimativamente la probabilità γ che, nelle prossime 100 estrazioni, il numero 1 esca, sulla ruota di Roma, almeno 12 volte. (**Suggerimento**: per semplificare i calcoli si consideri che $\sqrt{17} \simeq 4,1$)

ESAME DI CALCOLO DELLE PROBABILITÀ 02/07/2002
FOGLIO RISPOSTE

NOME.. COGNOME.......................................

ESERCIZIO 1.

a1) $P(A) =$ ....

a2) $P(B) =$ ....

b1) $E[T|X_1 = 1] =$..

$E[T|X_1 = 0] =$..

$E[T]$=..

b2) $P(T = k) =$.. per k................................

c) ....

ESERCIZIO 2.

a1) $E[X+Y]$= ....

a2) $Var(X+Y)$= ....

a3) Legge di $X + Y$
....
....
....
....

b1) $E[XY]$= ....

b2) $Var(XY)$= ....

c1) Coefficiente di correlazione tra $U = X+Y$ e $V = XY =$ ....

c2) Retta di regressione di $V = XY$ rispetto a $U = X + Y$
....
....

ESERCIZIO 3.

a1) frequenza relativa dei messaggi con virus..

a2) frequenza relativa dei messaggi senza attachment ....

b1) $(p = 0,1)$ n=................................

b2) (p non noto) n=................................

c) (FACOLTATIVO) $n \approxeq$................................

ESERCIZIO 4.

a1) Leggi di M_1, M_2 e M_3.

....

....

....

....

....

....

....

a2) $E[M_1]$=............... $E[M_2]$=....................... $E[M_3]$=.................

b1) Per $n = 2, 3, 4$ $P(M_n < M_{n-1} | M_{n-1} = k)$=

....

....

....

....

....

$E(\mathbb{I}_{\{M_n < M_{n-1}\}} | M_{n-1}) =$

....

....

....

....

....

....

b2)$n = 2, 3, 4$ $P(M_n < M_{n-1}) = E(\mathbb{I}_{\{M_n < M_{n-1}\}})$.

....

....

....

....

c) $E[N]$ =.................................