Calcolo delle Probabilità 1 2003/04 - Laurea triennale
Foglio esercizi n.6

Consegnato venerdì 14 maggio 2004.
Consegnare le risposte entro venerdì 21 maggio 2004.

1. Sia X_1 una variabile aleatoria che può assumere i valori 0, $\frac{1}{2}$, 1, $\frac{3}{2}$ e con

$$p_{X_1}(0) = P(X_1 = 0) = \frac{1}{10}, \qquad p_{X_1}(\frac{1}{2}) = P(X_1 = \frac{1}{2}) = \frac{1}{10},$$
$$p_{X_1}(1) = P(X_1 = 1) = \frac{4}{10}, \qquad p_{X_1}(\frac{3}{2}) = P(X_1 = \frac{3}{2}) = \frac{4}{10}.$$

a) Calcolare il valore atteso μ, la varianza σ^2 e lo scarto standard σ per la variabile X_1

b) Trovare la distribuzione di probabilità della variabile aleatoria che si ottiene quale standardizzata di X_1

c) Siano $X_2, X_3, ..., X_{100}$ delle variabili aleatorie con la stessa distribuzione di X_1 e tali che tutte le coppie (X_i, X_j) siano indipendenti, per $1 \leq i \neq j \leq 100$ e poniamo

$$Y_{100} \equiv \frac{\sum_{j=1}^{100} X_j}{100}$$

Dare una limitazione inferiore alla probabilità

$$P\{\mu - \frac{1}{10} \leq Y_{100} \leq \mu + \frac{1}{10}\}.$$

2. Una coppia di dadi perfetti a sei facce viene lanciata n volte ed indichiamo con S_n il numero dei lanci in cui il maggiore fra i due punteggi risulta maggiore o uguale a 5.

Calcolare il minimo valore di n per il quale, in base alla disuguaglianza di Chebishev, si possa scrivere

$$P\{|\frac{S_n}{n} - \frac{5}{9}| > \frac{1}{30}\} \leq \frac{1}{10}$$

3. Siano X ed Y sono due variabili aleatorie la cui distribuzione di probabilità congiunta è indicata nella seguente tabella (per entrambe l'insieme dei valori possibili è costituito da $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$):

$Y \diagdown X$	**−2**	**−1**	**0**	**1**	**2**
−2	0	0.1	0	0	0.05
−1	0.1	0.1	0.05	0	0
0	0	0.05	0	0.125	0
1	0	0	0.125	0.05	0.05
2	0.05	0	0	0.05	0.1

a) Calcolare il coefficiente di correlazione fra X ed Y.

b) Calcolare $Cov(2X - 1, -Y)$.

4. a) Calcolare la funzione di distribuzione F_{X_1} della variabile aleatoria X_1 dell'Esercizio 1; disegnare il grafico di F_{X_1} e calcolare, con l'ausilio di F_{X_1}

$$P(0 < X \leq 1), \quad P(0 \leq X < 1), \quad P(0.3 \leq X < 1.2), \quad P(0.3 < X \leq 1.2).$$

b) Siano date le seguenti funzioni

$$F_1(x) = 0, \quad \text{per } x \leq 1, \qquad F_1(x) = \frac{x}{x+1}, \quad \text{per } x > 1,$$
$$F_2(x) = 0, \quad \text{per } x < 1, \qquad F_2(x) = \frac{x}{x+1}, \quad \text{per } x \geq 1,$$
$$F_3(x) = 0, \quad \text{per } x < -1, \qquad F_3(x) = x, \quad \text{per } -1 \leq x < 1, \qquad F_3(x) = 1, \quad \text{per } x \geq 1,$$
$$F_4(x) = 0, \quad \text{per } x \leq 0, \qquad F_4(x) = x, \quad \text{per } 0 < x < 1, \qquad F_4(x) = 1, \quad \text{per } x \geq 1,$$
$$F_5(x) = x.$$

Disegnare il grafico di F_i per ogni $i = 1, \dots, 5$; mostrare che F_2 ed F_4 possono essere funzioni di distribuzione (ovvero che soddisfano le condizioni caratterizzanti delle funzioni di distribuzione[1]), mentre F_1, F_3 ed F_5 non lo possono essere, giustificando la risposta.

c) Siano ora Z_i variabili aleatorie con funzione di distribuzione F_i, per $i = 2, 4$. Calcolare $P(Z_i = 1)$ e $P(Z_i = -1)$, per $i = 2, 4$.

[1]Si ricordi che le condizioni caratterizzanti delle funzioni di distribuzione sono:

0. $F(x) \in [0, 1]$, per ogni $x \in \mathbb{R}$.
1. F è monotona non decrescente, cioè crescente in senso lato.
2. F è continua da destra e ammette limiti da sinistra, per ogni $x \in \mathbb{R}$.
3. $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \qquad \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1.$