**Calcolo delle Probabilità 1 2003/04 - Laurea triennale**
**Foglio esercizi n.7**

**Consegnato venerdì 28 maggio 2004.**
**Consegnare le risposte entro martedì 1 giugno 2004.**

1. Sia $Y$ una variabile aleatoria geometrica (a partire da 1) di parametro $p$, con $p \in (0,1)$. Per ogni $n \geq 1$, si consideri la variabile aleatoria $Y \wedge n\big(= \min(Y,n)\big)$.
   a) Calcolare la distribuzione di $Y \wedge n$.
   b) Calcolare il valore atteso di $Y \wedge n$, utilizzando la formula $\mathbb{E}(X) = \sum_{i=0}^{n-1} P(X > i)$, valida per variabili aleatorie a valori in $\{0, 1, \dots, n\}$.
   c) Mostrare che
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(Y \wedge n) = \mathbb{E}(Y) \left(= \frac{1}{p}\right).$$

2. Sia $X$ una variabile aleatoria esponenziale di parametro $\lambda(> 0)$. Si definisca la variabile aleatoria $T$ come la parte intera inferiore di $X$, cioe'
$$T = \lfloor X \rfloor, \qquad \text{ovvero tale che } T(\omega) = k \Leftrightarrow k \leq X(\omega) < k + 1.$$
   a) Mostrare che $T$ è una variabile aleatoria geometrica, a partire da zero, individuandone il parametro.
   b) Calcolare valore atteso di $T$ e varianza di $T$.
   Posto invece $S$ la parte intera superiore di $X$, ovvero
$$S = \lceil X \rceil, \qquad \text{ovvero tale che } S(\omega) = k \Leftrightarrow k - 1 < X(\omega) \leq k.$$
   a') Mostrare che $S$ è una variabile aleatoria geometrica, a partire da uno, individuandone il parametro.
   b') Calcolare valore atteso di $S$ e varianza di $S$.

3. Sia $X_1$ una variabile aleatoria che può assumere i valori 0, $\frac{1}{2}$, 1, $\frac{3}{2}$ e con
$$p_{X_1}(0) = P(X_1 = 0) = \frac{1}{10}, \qquad p_{X_1}(\frac{1}{2}) = P(X_1 = \frac{1}{2}) = \frac{1}{10},$$
$$p_{X_1}(1) = P(X_1 = 1) = \frac{4}{10}, \qquad p_{X_1}(\frac{3}{2}) = P(X_1 = \frac{3}{2}) = \frac{4}{10}.$$
   Si ponga il valore atteso di $X_1$ uguale a $\mu$ e la sua varianza uguale a $\sigma^2$.
   Siano $X_1$, $X_2$, $X_3, ..., X_{100}$ delle variabili aleatorie con la stessa distribuzione di $X_1$ e (globalmente) indipendenti tra loro e si ponga $Y_{100} \equiv \frac{\sum_{j=1}^{100} X_j}{100}$. Utilizzando il Teorema Centrale del Limite, approssimare la probabilità
$$P\left(\left\{\mu - \frac{1}{10} \leq Y_{100} \leq \mu + \frac{1}{10}\right\}\right),$$

4. Sia $X$ una variabile aleatoria continua con densità di probabilità $f_X$ data da
$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x < -1, \\ c|x|^3 & \text{per } -1 < x < 1, \\ 0 & \text{per } x > 1. \end{cases}$$
   a) Trovare il valore di $c$.
   b) Calcolare $F_X(x)$, la funzione di distribuzione di $X$.
   c1) Calcolare valore atteso di $X$. c2) Calcolare la varianza di $X$.
   Se $X_1$, $X_2$, $X_3$,... formano una successione di variabili aleatorie tutte con la stessa distribuzione di $X$, e globalmente indipendenti, utilizzare il teorema centrale del limite per trovare un'espressione approssimata della funzione di distribuzione di
$$S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n,$$
   in particolare trovare un valore approssimato di $F_{S_n}(x) = P(S_n \leq x)$ per $n = 600$ ed $x = 25$.