Corso di Laurea Triennale in Matematica
Calcolo delle Probabilità I (docenti G. Nappo, F. Spizzichino)

Prova di Mercoledì 30 giugno 2004 (tempo a disposizione: 3 ore).

Scrivere su ogni foglio NOME e COGNOME. Le risposte devono essere giustificate sui fogli protocollo e riportate nel foglio RISPOSTE.

ATTENZIONE: concentrare l'attenzione sugli Esercizi 1 e 2, e dedicare il tempo rimasto a risolvere uno degli altri due.

Esercizio 1. In un test di ammissione vi è una domanda, inserita per verificare la conoscenza dell'argomento A da parte dei concorrenti, cui vengono proposte 5 risposte alternative; di tali risposte alternative una soltanto è corretta.

Si reputa che chi conosce A ha una probabilità $p = 0.90$ di fornire la risposta corretta. Coloro che non conoscono A rispondono a caso ed hanno una probabilità $\rho = 0.20$ di fornire la risposta corretta.

Si reputa inoltre che ciascun concorrente ha una probabilità $\pi = 0.8$ di conoscere A (e vi è indipendenza fra i diversi concorrenti).

a) Posto A_1 l'evento $\{$*il concorrente 1 conosce l'argomento A*$\}$ e posto R_1 l'evento $\{$*il concorrente 1 risponde correttamente alla domanda*$\}$, **individuare**, sulla base dei dati del problema,

$$P(A_1), \quad P(R_1|A_1) \quad \text{e} \quad P(R_1|\overline{A}_1),$$

e calcolare la probabilità che il concorrente 1 dia la risposta corretta.

b) Qual è la probabilità condizionata che il concorrente 1 conosca l'argomento A, **sapendo che** ha dato la risposta corretta?

c) Si scrutinano le risposte dei concorrenti una dopo l'altra. Qual è la probabilità che si trovi **per la prima volta** una risposta errata esattamente al 10^0 scrutinio?

d) Qual è la probabilità dell'evento D=$\{$*tra i primi* 10 *concorrenti, esattamente* 9 *danno la risposta corretta*$\}$?

e) Si supponga ora di sapere che tra i primi 10 concorrenti esattamente 9 hanno dato la risposta corretta, qual è la proabilità dell'evento E=$\{$*tra* 3 *concorrenti scelti a caso tra i primi dieci, esattamente* 2 *danno la risposta corretta*$\}$?

Esercizio 2. Sia U una variabile aleatoria binomiale di parametri $(2, \frac{1}{2})$. Si definisca

$$T = U - 1$$

a) Calcolare la distribuzione di probabilità di T.

Sia ora X una variabile aleatoria con distribuzione uniforme in $\{-1, 0, +1\}$ (ovvero $X(\Omega) = \{-1, 0, +1\}$ e $P(X = h) = \textit{costante}$ per $h = -1, 0, +1$)e indipendente da T. Si definisca la variabile aleatoria $Y = XT$.

b) Calcolare la distribuzione di probabilità congiunta di X ed Y.

c) Calcolare la distribuzione condizionata di X, dato $\{Y = 0\}$ e verificare se $\{X = 0\}$ ed $\{Y = 0\}$ sono eventi stocasticamente indipendenti, correlati positivamente o correlati negativamente.

d) Sia ora $W = 2(X + Y) + 1$. **Mostrare** che il valore atteso di W vale 1 e che la varianza di W vale 4.

e) Sia ora W_n una successione di variabili aleatorie tutte indipendenti e tutte con la stessa distribuzione di W e siano, come al solito, $S_n = W_1 + W_2 + \ldots + W_n$ e $Y_n = \frac{S_n}{n} = \frac{W_1+W_2+\ldots+W_n}{n}$.

Utilizzando il Teorema Centrale del Limite, calcolare approssimativamente

$$P(Y_n > x), \quad \text{per } n = 81 \quad \text{ed } x = 1.2\,(= 12/10)\,.$$

Esercizio 3. X è una variabile aleatoria con funzione di distribuzione data da

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{per} \quad x < -1 \\ \frac{1}{2}(x+1) & \text{per} \quad -1 \le x < 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{x^2}{2} & \text{per} \quad 0 \le x < 1 \\ 1 & \text{per} \quad x \ge 1 \end{cases}$$

a) Calcolare $P(-\frac{1}{2} \le X \le \frac{1}{2})$.
b) Calcolare la funzione di densità di probabilità di X.
c) Calcolare $\mathbb{E}(X)$.

Esercizio 4. Un solitario inizia nel seguente modo: inizialmente si lancia un dado e si ha $X_0 = -1$ se escono 1 o 2, $X_0 = 0$ se escono 3 o 4, oppure $X_0 = +1$ se escono 5 o 6. Successivamente si lanciano due monete ben equilibrate e se escono due croci si cambia segno (ovvero si passa da i a j=-i), se escono una croce ed una testa si va in 0 (ovvero si passa da i a 0), e se escono due teste si rimane dove ci si trova (ovvero si passa da i a j=i). Sia X_1 la variabile aleatoria ottenuta in questo modo.

a) Individuare, sulla base dei dati del problema, $P(X_1 = j | X_0 = i)$, per i e j in $\{-1, 0, +1\}$.
b) Calcolare la distribuzione di X_0 e la distribuzione di X_1.
c) Si ripete il lancio delle due monete e si ottiene quindi X_2 a partire da X_1, con lo stesso meccanismo con cui si è ottenuta X_1 da X_0 (ovvero $P(X_2 = j | X_1 = i) = P(X_1 = j | X_0 = i)$). Il gioco riesce se $X_2 = 0$.

Calcolare la probabilità che il gioco riesca.

(parte facoltativa) Si noti che X_0, X_1 ed X_2 si possono considerare come i primi elementi di una successione di variabili aleatorie $\{X_n\}_{n \ge 0}$, che è una catena di Markov con matrice delle probabilità di transizione

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i) = P(X_1 = j | X_0 = i)$$

d) Calcolare $P(X_0 = 1, X_1 = 1, X_2 = 0)$.
e) Calcolare la distribuzione stazionaria della catena.
f) Calcolare $P(X_2 = j | X_0 = i)$

FOGLIO RISPOSTE della prova di Mercoledì 30 giugno 2004

NOME e COGNOME ....

canale NAPPO ☐ **canale SPIZZICHINO** ☐

ORALE 2 luglio ... ☐ ORALE dopo il 20 luglio ... ☐

Esercizio 1.

a) $P(A_1) =$ .... $P(R_1|A_1) =$ .... $P(R_1|\overline{A}_1) =$ .... $p_a =$ ....

b) $p_b =$ .... **c)** $p_c =$ ....

d) $p_d =$ .... **e)** $p_e =$ ....

Esercizio 2.

a)

....

....

....

b)

$Y \diagdown X$	$-\mathbf{1}$	$\mathbf{0}$	$+\mathbf{1}$
$-\mathbf{1}$			
$\mathbf{0}$			
$+\mathbf{1}$			

c) distribuzione di X condizionata a $Y = 0$

....

....

....

$\{X = 0\}$ ed $\{Y = 0\}$ sono

indipendenti ☐ correlati positivamente ☐ correlati negativamente ☐

d) svolto ☐ non svolto ☐ **e)** $P(Y_{81} > 1.2) \simeq$ ....

Esercizio 3.

a) $P(-\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{1}{2}) =$ .... **b)** $f(x) = \begin{cases} \text{............} & \text{per } x < -1 \\ \text{............} & \text{per } -1 < x < 0 \\ \text{............} & \text{per } 0 < x < 1 \\ \text{............} & \text{per } x > 1 \end{cases}$

c) $E(X) =$ ....

Esercizio 4.

a) svolto ☐ non svolto ☐

b) $P(X_0 = -1) =$ .... $P(X_0 = 0) =$ .... $P(X_0 = +1) =$ ....

$P(X_1 = -1) =$ .... $P(X_1 = 0) =$ .... $P(X_1 = +1) =$ ....

c) Probabilità che il gioco riesca = ...

facoltativi

d) $P(X_0 = 1, X_1 = 1, X_2 = 0) =$ .... **e)** $\pi_{-1} =$ .... $\pi_0 =$ .... $\pi_{-1} =$ ....

f) svolto ☐ non svolto ☐

Corso di Laurea Triennale in Matematica
Calcolo delle Probabilità I (docenti G. Nappo, F. Spizzichino)

SOLUZIONI della prova di Mercoledì 30 giugno 2004 (tempo a disposizione: 3 ore).

Esercizio 1. In un test di ammissione vi è una domanda, inserita per verificare la conoscenza dell'argomento A da parte dei concorrenti, cui vengono proposte 5 risposte alternative; di tali risposte alternative una soltanto è corretta.

Si reputa che chi conosce A ha una probabilità $p = 0.90$ di fornire la risposta corretta. Coloro che non conoscono A rispondono a caso ed hanno una probabilità $\rho = 0.20$ di fornire la risposta corretta.

Si reputa inoltre che ciascun concorrente ha una probabilità $\pi = 0.8$ di conoscere A (e vi è indipendenza fra i diversi concorrenti).

a) Posto A_1 l'evento {*il concorrente 1 conosce l'argomento A*} e posto R_1 l'evento {*il concorrente 1 risponde correttamente alla domanda*}, individuare, sulla base dei dati del problema,

$$P(A_1), \quad P(R_1|A_1) \quad \textbf{e} \quad P(R_1|\overline{A}_1),$$

e calcolare la probabilità che il concorrente 1 dia la risposta corretta.
soluzione di a)

$$P(A_1) = \pi = 0.80, \quad P(R_1|A_1) = p = 0.90 \quad \text{e} \quad P(R_1|\overline{A}_1) = \rho = 0.20,$$

e quindi, per la formula delle proabilità totali,

$$P(R_1) = P(A_1)\,P(R_1|A_1) + P(\overline{A}_1)\,P(R_1|\overline{A}_1) = \tfrac{8}{10}\cdot\tfrac{9}{10} + \tfrac{2}{10}\cdot\tfrac{2}{10} = \tfrac{76}{100}$$

$$\Big(= 0.80\cdot 0.90 + 0.20\cdot 0.20 = 0.72 + 0.04 = 0.76\Big)$$

Infatti dai dati del problema, per ciascun concorrente si ha che

• *conosce l'argomento A* con probabilità $\pi = 0.80$, e cioè, più in generale se A_i={*il concorrente i conosce l'argomento* A}, allora $P(A_i) = \pi = 0.80$,

• **se conosce l'argomento A** la probabilità di rispondere esattamente è $p = 0.90$, cioè, più in generale, se R_i={*il concorrente i risponde correttamente alla domanda*}, allora $P(R_i|A_i) = p = 0.90$,

• **se non conosce l'argomento A** risponde a caso e ha probabilità $\rho = 0.20$ di dare la risposta corretta, cioè, più in generale, $P(R_i|\overline{A}_i) = \rho = 0.20$.

b) Qual è la probabilità condizionata che il concorrente 1 conosca l'argomento A, sapendo che ha dato la risposta corretta?
soluzione di b) $P(A_1|R_1) = \frac{72}{76} = \frac{18}{19} \simeq 0.947$

Infatti per la formula di Bayes

$$P(A_1|R_1) = \frac{P(A_1)\cdot P(R_1|A_1)}{P(A_1)\,P(R_1|A_1) + P(\overline{A}_1)\,P(R_1|\overline{A}_1)}$$

$$= \frac{\frac{8}{10}\cdot\frac{9}{10}}{\frac{8}{10}\cdot\frac{9}{10} + \frac{2}{10}\cdot\frac{2}{10}} = \frac{8\cdot 9}{8\cdot 9 + 2\cdot 2} = \frac{72}{76} = \frac{18}{19} \simeq 0.947$$

c) Si scrutinano le risposte dei concorrenti una dopo l'altra. Qual è la probabilità che si trovi per la prima volta una risposta errata esattamente al 10^0 scrutinio?
soluzione di c) $P(R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_9 \cap \overline{R}_{10}) = (0.76)^9 \cdot 0.24$

Infatti, posto l'evento C={*si trova* ***per la prima volta*** *una risposta errata esattamente al* 10^0 *scrutinio*}, si ha

$$C = R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_9 \cap \overline{R}_{10}$$

e tenendo conto dell'indipendenza dei comportamenti dei concorrenti si ha

$$P(R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_9 \cap \overline{R}_{10}) = P(R_1) \cdot P(R_2) \cdot \cdots \cdot P(R_9) \cdot P(\overline{R}_{10}) = (0.76)^9 \cdot 0.24$$

d) Qual è la probabilità dell'evento D={ *tra i primi* 10 *concorrenti, esattamente* 9 *danno la risposta corretta*}?
soluzione di d) $P(D) = \binom{10}{9} (0.76)^9 \cdot 0.24 = 10P(C)$

Infatti si tratta della probabilità di 9 successi su 10 prove nello schema di Bernoulli R_1, R_2, $\dots$, R_{10} (si tratta di eventi indipendenti e tutti con la stessa probabilità), e quindi si tratta di probabilità binomiali.

e) Si supponga ora di sapere che tra i primi 10 concorrenti esattamente 9 hanno dato la risposta corretta, qual'è la proabilità dell'evento E={*tra* 3 *concorrenti scelti a caso tra i primi dieci, esattamente* 2 *danno la risposta corretta*}?
soluzione di e) $P(E) = \frac{3}{10}$.

Infatti sapendo che tra i primi 10 concorrenti esattamente 9 hanno dato la risposta corretta e quindi 1 ha dato una risposta errata, il problema corrisponde al calcolo della probabilità di ottenere due palline bianche (2 risposte esatte) e una rossa (1 risposta errata) l'estrazione di tre palline da un'urna contente 10 palline di cui 9 bianche e 1 rossa, e quindi

$$P(E) = \frac{\binom{9}{2} \cdot \binom{1}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{\frac{9 \cdot 8}{2 \cdot 1} \cdot 1}{\frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1}} = \frac{3}{10}.$$

Esercizio 2. Sia U una variabile aleatoria binomiale di parametri $(2, \frac{1}{2})$. Si definisca

$$T = U - 1$$

a) Calcolare la distribuzione di probabilità di T.
soluzione di a) $P(T = -1) = \frac{1}{4}$, $P(T = 0) = \frac{1}{2}$, $P(T = +1) = \frac{1}{4}$.

Infatti U è una variabile aleatoria binomiale di parametri $(2, \frac{1}{2})$, e quindi

$$P(U = 0) = \binom{2}{0} p^0 (1-p)^2, \quad P(U = 1) = \binom{2}{1} p^1 (1-p)^1, \quad P(U = 2) = \binom{2}{2} p^2 (1-p)^0,$$

ovvero, tenendo conto che $p = 1 - p = \frac{1}{2}$,

$$P(U = 0) = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}, \quad P(U = 1) = 2 \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \quad P(U = 2) = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Basta poi tener conto che, essendo $T = U - 1$,

$$\{T = -1\} = \{U = 0\}, \quad \{T = 0\} = \{U = 1\}, \quad \{T = +1\} = \{U = 2\},$$

e quindi

$$P(T=-1)=P(U=0), \quad P(T=0)=P(U=1), \quad P(T=+1)=P(U=2),$$

Sia ora X una variabile aleatoria con distribuzione uniforme in $\{-1,0,+1\}$ (ovvero $X(\Omega)=\{-1,0,+1\}$ e $P(X=h)=$ *costante* per $h=-1,0,+1$) e indipendente da T. Si definisca la variabile aleatoria $Y=XT$.

b) Calcolare la distribuzione di probabilità congiunta di X ed Y.

soluzione di b)

$Y \diagdown X$	**−1**	**0**	**+1**	$P(Y=i)$
−1	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{12}$	$p_Y(-1)=\frac{2}{12}$
0	$\frac{2}{12}$	$\frac{4}{12}$	$\frac{2}{12}$	$p_Y(0)=\frac{8}{12}$
+1	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{12}$	$p_Y(+1)=\frac{2}{12}$
$P(X=i)$	$p_X(-1)=\frac{4}{12}$	$p_X(0)=\frac{4}{12}$	$p_X(+1)=\frac{4}{12}$	1

.

Infatti

$$\{X=-1,Y=-1\}=\{X=-1,T=+1\};\ \{X=-1,Y=0\}=\{X=-1,T=0\};\ \{X=-1,Y=+1\}=\{X=-1,T=-1\};$$
$$\{X=0,Y=-1\}=\emptyset; \quad \{X=0,Y=0\}=\{X=0\}; \quad \{X=0,Y=+1\}=\emptyset;$$
$$\{X=+1,Y=-1\}=\{X=+1,T=-1\};\ \{X=+1,Y=0\}=\{X=+1,T=0\};\ \{X=+1,Y=+1\}=\{X=+1,T=+1\}.$$

e, tenendo conto dell'indipendenza di X e T si ha

$$P(X=-1,Y=-1)=P(X=-1,T=+1)=P(X=-1)P(T=+1)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4};$$
$$P(X=-1,Y=0)=P(X=-1,T=0)=P(X=-1)P(T=0)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2};$$
$$P(X=-1,Y=+1)=P(X=-1,T=-1)=P(X=-1)P(T=-1)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4};$$
$$P(X=0,Y=-1)=0; \quad P(X=0,Y=0)=P(X=0)=\frac{1}{3}; \quad P(X=0,Y=+1)=0;$$
$$P(X=+1,Y=-1)=P(X=+1,T=-1)=P(X=+1)P(T=-1)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4};$$
$$P(X=+1,Y=0)=P(X=+1,T=0)=P(X=+1)P(T=0)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2};$$
$$P(X=+1,Y=+1)=P(X=+1,T=+1)=P(X=+1)P(T=+1)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}.$$

c) Calcolare la distribuzione condizionata di X, dato $\{Y=0\}$ e verificare se $\{X=0\}$ ed $\{Y=0\}$ sono eventi stocasticamente indipendenti, correlati positivamente o correlati negativamente.

soluzione di c) $P(X=-1|Y=0)=\frac{1}{4}$, $P(X=0|Y=0)=\frac{1}{2}$, $P(X=+1|Y=0)=\frac{1}{4}$,
ed essendo $P(X=0|Y=0)=\frac{1}{2}>P(X=0)=\frac{1}{3}$, i due eventi sono correlati positivamente.

Infatti

$$P(X=-1|Y=0)=\frac{P(X=-1,Y=0)}{P(Y=0)}=\frac{P(X=-1,Y=0)}{P(X=-1,Y=0)+P(X=0,Y=0)+P(X=+1,Y=0)}$$
$$=\frac{\frac{2}{12}}{\frac{2}{12}+\frac{4}{12}+\frac{2}{12}}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4},$$

$$P(X=0|Y=0) = \frac{P(X=0,Y=0)}{P(Y=0)} = \frac{P(X=0,Y=0)}{P(X=-1,Y=0)+P(X=0,Y=0)+P(X=+1,Y=0)}$$
$$= \frac{\frac{4}{12}}{\frac{2}{12}+\frac{4}{12}+\frac{2}{12}} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2},$$

$$P(X=+1|Y=0) = \frac{P(X=+1,Y=0)}{P(Y=0)} = \frac{P(X=+1,Y=0)}{P(X=-1,Y=0)+P(X=0,Y=0)+P(X=+1,Y=0)}$$
$$= \frac{\frac{2}{12}}{\frac{2}{12}+\frac{4}{12}+\frac{2}{12}} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}.$$

Si può procedere anche tenendo conto che

$$P(X=-1|Y=0) \propto P(X=-1,Y=0) = \frac{2}{12} \propto 2 \propto 1,$$
$$P(X=0|Y=0) \propto P(X=0,Y=0) = \frac{4}{12} \propto 4 \propto 2,$$
$$P(X=+1|Y=0) \propto P(X=+1,Y=0) = \frac{2}{12} \propto 2 \propto 1,$$

e poi normalizzando.

d) Sia ora $W = 2(X+Y)+1$. Mostrare che il valore atteso di W vale 1 e che la varianza di W vale 4.
soluzione di d)
Infatti,

$$\begin{aligned}
E(W) &= \sum_{i\in\{-1,0,+1\}}\sum_{j\in\{-1,0,+1\}} \big(2(i+j)+1\big)P(X=i,Y=j)\\
&= (-4+1)P(X=-1,Y=-1)+(-2+1)P(X=-1,Y=0)+(0+1)P(X=-1,Y=+1)\\
&+ (-2+1)P(X=0,Y=-1)+(0+1)P(X=0,Y=0)+(+2+1)P(X=0,Y=+1)\\
&+ (0+1)P(X=+1,Y=-1)+(+2+1)P(X=+1,Y=0)+(+4+1)P(X=+1,Y=+1)\\
&= -3\frac{1}{12}+(-1)\frac{2}{12}+\frac{1}{12}+0+\frac{4}{12}+0+\frac{1}{12}+3\frac{2}{12}+5\frac{1}{12} = \frac{-3-2+1+4+1+6+5}{12} = \frac{12}{12} = 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E\big((W-1)^2\big) &= \sum_{i\in\{-1,0,+1\}}\sum_{j\in\{-1,0,+1\}} \big([2(i+j)]^2\big)P(X=i,Y=j)\\
&= (-4)^2P(X=-1,Y=-1)+(-2)^2P(X=-1,Y=0)+(0)^2P(X=-1,Y=+1)\\
&+ (-2)^2P(X=0,Y=-1)+(0)^2P(X=0,Y=0)+(+2)^2P(X=0,Y=+1)\\
&+ (0)^2P(X=+1,Y=-1)+(+2)^2P(X=+1,Y=0)+(+4)^2P(X=+1,Y=+1)\\
&= 16\frac{1}{12}+4\frac{2}{12}+0+0+0+0++04\frac{2}{12}+16\frac{1}{12} = \frac{16+8+8+16}{12} = \frac{48}{12} = 4
\end{aligned}$$

Alternativamente, per motivi di simmetria sia X che Y hanno valore atteso nullo, e quindi

$$E(W) = 2\big(E(X)+E(Y)\big)+1 = 2(0+0)+1$$

La varianza di W si può calcolare allora come

$$Var(W) = E\big((W-1)^2\big) = E\big(2^2(X+Y)^2\big) = 4E(X^2+2XY+Y^2) = 4\big(E(X^2)+2E(XY)+E(Y^2)\big).$$

Basta poi calcolare

$$E(X^2) = (-1)^2\cdot P(X=-1)+0^2\cdot P(X=0)+1^2P(X=+1) = P(X=-1)+P(X=1) = \frac{2}{3}$$

$$E(Y^2) = (-1)^2 \cdot P(Y=-1) + 0^2 \cdot P(Y=0) + 1^2 P(Y=+1) = P(Y=-1) + P(Y=1) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned} E(XY) &= \sum_{i\in\{-1,0,+1\}} \sum_{j\in\{-1,0,+1\}} i \cdot j P(X=i, Y=j) \\ &= (+1)P(X=-1,Y=-1) + 0P(X=-1,Y=0) + (-1)P(X=-1,Y=+1) \\ &+ 0P(X=0,Y=-1) + 0P(X=0,Y=0) + 0P(X=0,Y=+1) \\ &+ (-1)P(X=+1,Y=-1) + 0P(X=+1,Y=0) + (+1)P(X=+1,Y=+1) \\ &= \frac{1}{12} + 0 - 1\frac{1}{12} + 0 + 0 + 0 - \frac{1}{12} + 0 + \frac{1}{12} = \frac{1-1-1+1}{12} = 0 \end{aligned}$$

e) Sia ora W_n una successione di variabili aleatorie tutte indipendenti e tutte con la stessa distribuzione di W e siano come al solito $S_n = W_1 + W_2 + \ldots + W_n$ e $Y_n = \frac{S_n}{n} = \frac{W_1+W_2+\ldots+W_n}{n}$. Utilizzando il Teorema Centrale del Limite, calcolare approssimativamente

$$P(Y_{81} > 1.2).$$

soluzione di e)

Infatti, posto $\mu = E(W_k) = 1$ e $\sigma^2 = Var(W_k) = 4$,

$$\begin{aligned} P(Y_n > x) &= 1 - P(Y_n \le x) = 1 - P(S_n \le nx) = 1 - P\left(\tfrac{S_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \le \tfrac{nx - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}\right) = 1 - P\left(\tfrac{S_n - n}{2\sqrt{n}} \le \sqrt{n}\,\tfrac{x-1}{2}\right) \\ &\simeq 1 - \Phi\left(\sqrt{n}\,\tfrac{x-1}{2}\right) = 1 - \Phi\left(9\,\tfrac{1.2-1}{2}\right) = 1 - \Phi(0.90) \simeq 1 - 0.8159 = 0.1841 \end{aligned}$$

se $\sqrt{n}\frac{x-1}{2} = 0.90$ cioè se $x = 1 + \frac{2}{\sqrt{n}}0.90$

Si noti che se $n = 81$, $\sqrt{81} = 9$ allora $x = 1 + \frac{2}{9} \cdot 0.90 = 1 + \frac{2}{9}\,\frac{9}{10} = 1 + \frac{2}{10} = 1.2$.

Esercizio 3. X è una variabile aleatoria con funzione di distribuzione data da

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{per} \quad x < -1 \\ \frac{1}{2}(x+1) & \text{per} \quad -1 \le x < 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{x^2}{2} & \text{per} \quad 0 \le x < 1 \\ 1 & \text{per} \quad x \ge 1 \end{cases}$$

a) Calcolare $P(-\frac{1}{2} \le X \le \frac{1}{2})$.

soluzione di a) $P(-\frac{1}{2} \le X \le \frac{1}{2}) = \frac{3}{8}$

Infatti, per $a \le b$ $P(a \le X \le b) = P(X = a) + P(a < X \le b) = F_X(a) - F_X(a^-) + F_X(b) - F_X(a) = F_X(b) - F_X(a)$, dove l'ultima uguaglianza dipende dal fatto che nel nostro caso la funzione $x \to F_X(x) = F(x)$ è continua.

Per verificare la continuità basta considerare che

- $F(-1^-) = 0$, che coincide con $F(-1) = \frac{1}{2}(-1+1) = 0$;
- $F(0^-) = \frac{1}{2}$, che coincide con $F(0) = \frac{1}{2} + \frac{0^2}{2}) = \frac{1}{2}$;
- $F(1^-) = \frac{1}{2} + \frac{1^2}{2}) = 1$, che coincide con $F(1) = 1$;

Quindi

$$P(-\frac{1}{2} \le X \le \frac{1}{2}) = F(\tfrac{1}{2}) - F(-\tfrac{1}{2}) = \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{4}}{2} - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{5}{8} - \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$$

b) Calcolare la funzione di densità di probabilità di X.
soluzione di b)

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0 & \text{per} \quad x < -1 \\ \frac{1}{2} & \text{per} \quad -1 < x < 0 \\ x & \text{per} \quad 0 < x < 1 \\ 0 & \text{per} \quad x > 1 \end{cases}$$

Come verifica, si noti che $f(x)$ è effettivamente una densità di probabilità, infatti $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, ed inoltre

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} \frac{1}{2}\,dx + \int_{0}^{1} x\,dx = \frac{1}{2} + \frac{x^2}{2}\Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

In realtà **si dovrebbe verificare** che $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\,dy$, ovvero che
- per $x < -1$

$0 = F(x) \overset{?}{=} \int_{-\infty}^{x} f(y)\,dy = 0$, il che è ovvio;
- per $-1 \leq x < 0$

$\frac{1}{2}(x+1) = F(x) \overset{?}{=} \int_{-\infty}^{x} f(y)\,dy = \int_{-1}^{x} f(y)\,dy = \int_{-1}^{x} \frac{1}{2}\,dy =$, il che è ovvio;
- per $0 \leq x < 1$

$\frac{1}{2} + \frac{x^2}{2} = F(x) \overset{?}{=} \int_{-\infty}^{x} f(y)\,dy = \int_{-1}^{0} f(y)\,dy + \int_{0}^{x} f(y)\,dy = \frac{1}{2} + \int_{0}^{x} y\,dy = \frac{1}{2} + \frac{y^2}{2}\Big|_{y=0}^{y=x}$, il che è ovvio;
- per $x \geq 1$

$1 = F(x) \overset{?}{=} \int_{-\infty}^{x} f(y)\,dy = \int_{-1}^{0} f(y)\,dy + \int_{0}^{1} f(y)\,dy = 1$, il che è ovvio;

c) Calcolare $\mathbb{E}(X)$.
soluzione di c) $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{12}$.

Infatti

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x\,f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} x\,f(x)\,dx + \int_{0}^{1} x\,f(x)\,dx \\ &= \int_{-1}^{0} x\,\frac{1}{2}\,dx + \int_{0}^{1} x\,x\,dx = \frac{1}{2}\,\frac{x^2}{2}\Big|_{x=-1}^{x=0} + \frac{x^3}{3}\Big|_{x=0}^{x=1} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{-3+4}{12} = \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

Esercizio 4. Un solitario inizia nel seguente modo: inizialmente si lancia un dado e si ha $X_0 = -1$ se escono 1 o 2, $X_0 = 0$ se escono 3 o 4, oppure $X_0 = +1$ se escono 5 o 6. Successivamente si lanciano due monete ben equilibrate e se escono due croci si cambia segno (ovvero si passa da i a j=-i), se escono una croce ed una testa si va in 0 (ovvero si passa da i a 0), e se escono due teste si rimane dove ci si trova (ovvero si passa da i a j=i). Sia X_1 la variabile aleatoria ottenuta in questo modo.

a) Individuare sulla base dei dati del problema $P(X_1 = j | X_0 = i)$, per j in $\{-1, 0, +1\}$, per $i = -1$, per $i = 0$, per $i = +1$
soluzione di a) Si ha

$$
\begin{aligned}
&P(X_1=-1|X_0=-1)=P(\mathit{due\ teste})=\frac{1}{4},\\
&P(X_1=0|X_0=-1)=P(\mathit{una\ testa\ e\ una\ croce})=\frac{1}{2},\\
&P(X_1=+1|X_0=-1)=P(\mathit{due\ croci})=\frac{1}{4}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&P(X_1=-1|X_0=0)=P(\emptyset)=0,\\
&P(X_1=0|X_0=0)=1,\\
&P(X_1=+1|X_0=0)=P(\emptyset)=0.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&P(X_1=-1|X_0=+1)=P(\mathit{due\ croci})=\frac{1}{4},\\
&P(X_1=0|X_0=+1)=P(\mathit{una\ testa\ e\ una\ croce})=\frac{1}{2},\\
&P(X_1=+1|X_0=+1)=P(\mathit{due\ teste})=\frac{1}{4}.
\end{aligned}
$$

La precedente deduzione può essere fatta intuitivamente, oppure procedendo in modo formale: (a titolo di esempio consideriamo solo $P(X_1=-1|X_0=-1)$)

$$
\begin{aligned}
P(X_1=-1|X_0=-1)&=\frac{P(X_1=-1,X_0=-1)}{P(X_0=-1)}=\frac{P(\{\mathit{due\ teste}\}\cap\{X_0=-1\})}{P(X_0=-1)}\\
&=\frac{P(\{\mathit{due\ teste}\}\cap\{\mathit{esce}\ 1\ o\ 2\})}{P(\{\mathit{esce}\ 1\ o\ 2\})}=\frac{P(\{\mathit{due\ teste}\})\cdot P(\{\mathit{esce}\ 1\ o\ 2\})}{P(\{\mathit{esce}\ 1\ o\ 2\})}\\
&=P(\mathit{due\ teste})
\end{aligned}
$$

b) Calcolare la distribuzione di X_0 e la distribuzione di X_1.
soluzione di b) $P(X_0=i)=\frac{1}{3}$, per $i=-1,\,0,\,+1$,
$P(X_1=-1)=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$, $P(X_1=0)=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$ $P(X_1=+1)=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$.
Infatti

$P(X_0=-1)=P(\mathit{esce}\ 1\ o\ 2)=\frac{1}{3}$, $\quad P(X_0=0)=P(\mathit{esce}\ 3\ o\ 3)=\frac{1}{3}$, $\quad P(X_0=+1)=P(\mathit{esce}\ 5\ o\ 6)=\frac{1}{3}$,

ed inoltre

$$
\begin{aligned}
P(X_1=j)&=P(X_0=-1)P(X_1=j|X_0=-1)\\
&\quad+P(X_0=0)P(X_1=j|X_0=0)+P(X_0=+1)P(X_1=j|X_0=+1)
\end{aligned}
$$

e quindi

$$
\begin{aligned}
P(X_1=-1) &= \frac{1}{3}\Big(P(X_1=-1|X_0=-1)+P(X_1=-1|X_0=0)+P(X_1=-1|X_0=+1)\Big)\\
&= \frac{1}{3}\Big(\frac{1}{4}+0+\frac{1}{4}\Big)=\frac{2}{12},\\
P(X_1=0) &= \frac{1}{3}\Big(P(X_1=0|X_0=-1)+P(X_1=0|X_0=0)+P(X_1=01|X_0=+1)\Big)\\
&= \frac{1}{3}\Big(\frac{1}{2}+1+\frac{1}{2}\Big)=\frac{2}{3},\\
P(X_1=+1) &= \frac{1}{3}\Big(P(X_1=+1|X_0=-1)+P(X_1=+1|X_0=0)+P(X_1=+1|X_0=+1)\Big)\\
&= \frac{1}{3}\Big(\frac{1}{4}+0+\frac{1}{4}\Big)=\frac{2}{12}.
\end{aligned}
$$

c) Si ripete il lancio delle due monete e si ottiene quindi X_2 a partire da X_1, con lo stesso meccanismo con cui si è ottenuta X_1 da X_0 (ovvero $P(X_2 = j|X_1 = i) = P(X_1 = j|X_0 = i)$). Il gioco riesce se $X_2 = 0$.

Calcolare la probabilità che il gioco riesca.

soluzione di c) $P(X_2 = 0) = \frac{5}{6}$

Infatti

$$
\begin{aligned}
P(X_2=0) = P(X_1=-1)\cdot P(X_2=0|X_1=-1)&\\
+P(X_1=0)\cdot P(X_2=0|X_1=0)+P(X_1=+1)\cdot P(X_2=0|X_0=+1)\Big)&\\
=\frac{1}{6}\frac{1}{2}+\frac{2}{3}1+\frac{1}{6}\frac{1}{2}=\frac{1+8+1}{12}=\frac{10}{12}=\frac{5}{6},&
\end{aligned}
$$

(parte facoltativa) Si noti che X_0, X_1 ed X_2 si possono considerare come i primi elementi di una successione di variabili aleatorie $\{X_n\}_{n\geq 0}$, che è una catena di Markov con matrice delle probabilità di transizione

$$P(X_{n+1} = j|X_n = i) = P(X_1 = j|X_0 = i)$$

d) Calcolare $P(X_0 = 1, X_1 = 1, X_2 = 0)$.

soluzione di d) $P(X_0 = 1, X_1 = 1, X_2 = 0) = \frac{1}{24}$.

Infatti, per la formula delle probabilità composte si ha

$$P(X_0 = 1, X_1 = 1, X_2 = 0) = P(\{X_0 = 1\})P(\{X_1 = 1\}|\{X_0 = 1\})P(\{X_2 = 0\}|\{X_1 = 1, X_0 = 1\})$$

ma tenendo conto della proprietà di Markov si ha $P(\{X_2 = 0\}|\{X_1 = 1, X_0 = 1\}) = P(\{X_2 = 0\}|\{X_1 = 1\})$, da cui eliminando le parentesi graffe dalle notazioni (come è usuale)

$$
\begin{aligned}
P(X_0=1,X_1=1,X_2=0) &= P(X_0=1)P(X_1=1|X_0=1)P(X_2=0|X_1=1)\\
&= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{24}.
\end{aligned}
$$

e) Calcolare la distribuzione stazionaria della catena.
soluzione di e) Il vettore delle probabilità stazionarie o invarianti o distribuzione stazionaria è $(\pi_{-1},\, \pi_0,\, \pi_{+1}) = 80,\, 1,\, 0)$.

Infatti si tratta di risolvere il seguente sistema vettoriale

$$\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}\, \boldsymbol{P}; \quad \pi_i \geq 0, \quad \pi_{-1} + \pi_0 + \pi_{+1} = 1$$

dove $\boldsymbol{\pi} = (\pi_{-1},\, \pi_0,\, \pi_{+1})$ è un vettore riga, e dove $\boldsymbol{P}$ è la matrice delle probabilità di transizione

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \pi_{-1} = \pi_{-1} P(X_1 = -1 | X_0 = -1) + \pi_0 P(X_1 = -1 | X_0 = 0) + \pi_{+1} P(X_1 = -1 | X_0 = +1) \\ \pi_0 = \pi_{-1} P(X_1 = 0 | X_0 = -1) + \pi_0 P(X_1 = 0 | X_0 = 0) + \pi_{+1} P(X_1 = 0 | X_0 = +1) \\ \pi_{+1} = \pi_{-1} P(X_1 = +1 | X_0 = -1) + \pi_0 P(X_1 = +1 | X_0 = 0) + \pi_{+1} P(X_1 = +1 | X_0 = +1) \\ \quad \pi_i \geq 0, \quad \pi_{-1} + \pi_0 + \pi_{+1} = 1 \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} \pi_{-1} = \pi_{-1}\, \frac{1}{4} + \pi_0\, 0 + \pi_{+1}\, \frac{1}{4} \\ \pi_0 = \pi_{-1}\, \frac{1}{2} + \pi_0\, 1 + \pi_{+1}\, \frac{1}{2} \\ \pi_{+1} = \pi_{-1}\, \frac{1}{4} + \pi_0\, 0 + \pi_{+1}\, \frac{1}{4} \\ \quad \pi_i \geq 0, \quad \pi_{-1} + \pi_0 + \pi_{+1} = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{3}{4}\, \pi_{-1} = \pi_{+1}\, \frac{1}{4} \\ \quad 0 = \pi_{-1}\, \frac{1}{2} + \pi_{+1}\, \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4}\, \pi_{+1} = \pi_{-1}\, \frac{1}{4} \\ \quad \pi_i \geq 0, \quad \pi_{-1} + \pi_0 + \pi_{+1} = 1 \end{cases}$$

Tenendo conto che $\pi_{-1} \geq 0$ e $\pi_{+1} \geq 0$, la seconda condizione è soddisfatta solo se $\pi_{-1} = \pi_{+1} = 0$ e quindi tenendo conto della condizione $\pi_{-1} + \pi_0 + \pi_{+1} = 1$, si ha necessariamente $\pi_0 = 1$.

f) Calcolare $P(X_2 = j | X_0 = i)$**.**
soluzione di f) Le probabilità di transizione in due passi sono data dagli elementi della seguente matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{6}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{6}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

Infatti si tratta di calcolare semplicemente gli elementi della matrice $\boldsymbol{P}^2$

$$\boldsymbol{P}^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{16} + 0 + \frac{1}{16} & \frac{1}{8} + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} & \frac{1}{16} + 0 + \frac{1}{16} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{16} + 0 + \frac{1}{16} & \frac{1}{8} + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} & \frac{1}{16} + 0 + \frac{1}{16} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{6}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{6}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$