

Corso di Laurea Triennale in Matematica
Calcolo delle Probabilità I (docenti G. Nappo, F. Spizzichino)

Prova di mercoledì 22 Settembre 2004 (tempo a disposizione: 2 ore e 40 minuti).
consegna compiti e inizio orale venerdì 24 ore 9

Scrivere su ogni foglio NOME e COGNOME. Le risposte devono essere giustificate sui fogli protocollo e riportate nel foglio RISPOSTE.

Esercizio 1. Paolo è candidato in un esame di concorso per entrare a lavorare in un centro di ricerca; tale esame prevede tre prove: una prova scritta, una prova orale e una prova pratica. Poniamo

$$A \equiv \{\text{Paolo supera la prova scritta}\},$$

$$B \equiv \{\text{Paolo supera la prova orale}\},$$

$$C \equiv \{\text{Paolo supera la prova pratica}\}.$$

Assumiamo che gli eventi A , B e C siano stocasticamente indipendenti e che risulti

$$p_A = P(A) = 0.7, \quad p_B = P(B) = 0.6, \quad p_C = P(C) = 0.8.$$

a) Qual è la probabilità che Paolo superi tutte e tre le prove? E quella che Paolo fallisca almeno una delle tre prove?

b) Qual è la probabilità che Paolo fallisca esattamente una delle tre prove?

c) Sapendo che Paolo ha fallito esattamente una delle tre prove, qual è la probabilità che Paolo abbia fallito la prova pratica?

d) Consideriamo ora 10 diversi candidati, in cui ciascuno ha le stesse probabilità di successo come Paolo e che si comportano ciascuno indipendentemente dall'altro. Poniamo

$$X_A = \text{numero candidati che superano la prova scritta}.$$

Trovare la distribuzione di probabilità ed il valore atteso di X_A .

e) Nella stessa situazione del punto d), trovare il valore atteso e la varianza del numero Y dei candidati che superano tutte le tre prove.

f) (facoltativo) Siano ora $X^{(i)}$ il numero dei candidati che superano esattamente i prove, per $i = 0, 1, 2, 3$. Scrivere l'espressione per calcolare

$$\mathbb{P}(X^{(1)} = 3, X^{(2)} = 2, X^{(3)} = 3).$$

Esercizio 2. Sia X una variabile aleatoria con funzione di densità di probabilità data da

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x < -2 \\ k(x+2) & \text{per } -2 \leq x < 0 \\ k(2-x) & \text{per } 0 \leq x < 2 \\ 0 & \text{per } x \geq 2 \end{cases}$$

a) Calcolare il valore di k .

b) Calcolare $P(1 \leq X \leq 2)$.

c) Mostrare che $\mathbb{E}(X) = 0$.

d) Mostrare che $\text{Var}(X) = \frac{2}{3}$

e) Siano X_n , per $n = 1, \dots, 100$, variabili aleatorie indipendenti e con la stessa legge di X . Calcolare approssimativamente

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{100} \sum_{n=1}^{100} X_n\right| > \frac{1}{\sqrt{600}}\right).$$

FOGLIO RISPOSTE della prova di Mercoledì 22 settembre 2004

NOME e COGNOME

canale NAPPO

canale SPIZZICHINO

Esercizio 1.

a) $P(\text{Paolo superi tutte e tre le prove}) = \dots\dots\dots$

$P(\text{Paolo fallisca almeno una delle tre prove}) = \dots\dots\dots$

b) $P(\text{Paolo fallisca esattamente una delle tre prove}) = \dots\dots\dots$

c) probabilità che *Paolo abbia fallito la prova pratica* **sapendo che** ha fallito esattamente una delle tre prove

d) $P(X_A = k) = \dots\dots\dots$ per $k = \dots\dots\dots$

$\mathbb{E}(X_A) = \dots\dots\dots$

e) $\mathbb{E}(Y) = \dots\dots\dots$ $Var(Y) = \dots\dots\dots$

f) (facoltativo)

$\mathbb{P}(X^{(1)} = 3, X^{(2)} = 2, X^{(3)} = 3) = \dots\dots\dots$

Esercizio 2.

a) $k = \dots\dots\dots$

b) $P(1 \leq X \leq 2) = \dots\dots\dots$

c) svolto non svolto

d) svolto non svolto

e) $\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{100} \sum_{n=1}^{100} X_n\right| > \frac{1}{\sqrt{600}}\right) \dots\dots\dots$

RISPOSTE della prova di Mercoledì 22 settembre 2004

Esercizio 1.

a) $P(\text{Paolo superi tutte e tre le prove}) = 0,336$

$P(\text{Paolo fallisca almeno una delle tre prove}) = 0,664$

b) $P(\text{Paolo fallisca esattamente una delle tre prove}) = 0,452$

c) probabilità che *Paolo abbia fallito la prova pratica sapendo che* ha fallito esattamente una delle tre prove $= \frac{21}{113} \simeq 0,1858$

d) $P(X_A = k) = \binom{10}{k} (0,7)^k (0,3)^{10-k}$ per $k = 0, 1, \dots, 10$, $\mathbb{E}(X_A) = 7$

e) $\mathbb{E}(Y) = 3,36$ $Var(Y) = 2,23104$

f) (facoltativo)

$\mathbb{P}(X^{(1)} = 3, X^{(2)} = 2, X^{(3)} = 3) = \frac{10!}{2!3!2!3!} (0,024)^2 (0,188)^3 (0,452)^2 (0,336)^3$

Esercizio 2.

a) $k = \frac{1}{4}$

b) $P(1 \leq X \leq 2) = \frac{1}{8}$

c) (vedi soluzioni) \square

d) (vedi soluzioni) \square

e) $\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{100} \sum_{n=1}^{100} X_n\right| > \frac{1}{\sqrt{600}}\right) \simeq 0,6170$

SOLUZIONI della prova di mercoledì 22 Settembre 2004

Esercizio 1. Paolo è candidato in un esame di concorso per entrare a lavorare in un centro di ricerca; tale esame prevede tre prove: una prova scritta, una prova orale e una prova pratica. Poniamo

$A \equiv \{\text{Paolo supera la prova scritta}\},$

$B \equiv \{\text{Paolo supera la prova orale}\},$

$C \equiv \{\text{Paolo supera la prova pratica}\}.$

Assumiamo che gli eventi A , B e C siano stocasticamente indipendenti e che risulti

$$p_A = P(A) = 0.7, \quad p_B = P(B) = 0.6, \quad p_C = P(C) = 0.8.$$

a) Qual è la probabilità che Paolo superi tutte e tre le prove? E quella che Paolo fallisca almeno una delle tre prove?

soluzione di a): Le probabilità cercate valgono 0,336 e 0,664 rispettivamente.

Infatti il primo evento, ovvero l'evento che Paolo superi tutte e tre le prove corrisponde agli eventi $A \cap B \cap C$ e quindi, per l'indipendenza di A , B e C si ha

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) P(B) P(C) = p_A p_B p_C = 0,7 \cdot 0,6 \cdot 0,8 = 0,336.$$

Il secondo evento è il complementare del primo e quindi la sua probabilità è data da $1 - 0,336 = 0,664$.

b) Qual è la probabilità che Paolo fallisca esattamente una delle tre prove?

soluzione di b): La probabilità cercata vale 0,452.

Infatti l'evento che Paolo fallisca esattamente una delle tre prove corrisponde all'evento

$$E = (\bar{A} \cap B \cap C) \cup (A \cap \bar{B} \cap C) \cup (A \cap B \cap \bar{C}),$$

i tre eventi $\bar{A} \cap B \cap C$, $A \cap \bar{B} \cap C$ e $A \cap B \cap \bar{C}$ sono incompatibili (ovvero disgiunti, perciò, tenendo conto anche dell'indipendenza di A , B e C , la probabilità cercata vale

$$\begin{aligned} P(E) &= P(\bar{A} \cap B \cap C) + P(A \cap \bar{B} \cap C) + P(A \cap B \cap \bar{C}) \\ &= P(\bar{A})P(B)P(C) + P(A)P(\bar{B})P(C) + P(A)P(B)P(\bar{C}) \\ &= (1 - p_A) \cdot p_B \cdot p_C + p_A \cdot (1 - p_B) \cdot p_C + p_A \cdot p_B \cdot (1 - p_C) \\ &= 0,3 \cdot 0,6 \cdot 0,8 + 0,7 \cdot 0,4 \cdot 0,8 + 0,7 \cdot 0,6 \cdot 0,2 \\ &= 0,144 + 0,224 + 0,084 = 0,452. \end{aligned}$$

c) Sapendo che Paolo ha fallito esattamente una delle tre prove, qual è la probabilità che Paolo abbia fallito la prova pratica?

soluzione di c): La probabilità cercata vale $\frac{21}{113} \simeq 0,1858$.

Infatti si tratta di calcolare la probabilità dell'evento \bar{C} condizionata all'evento

$$E = (\bar{A} \cap B \cap C) \cup (A \cap \bar{B} \cap C) \cup (A \cap B \cap \bar{C}),$$

ovvero si tratta di calcolare

$$P(\bar{C}|E) = \frac{P(\bar{C} \cap E)}{P(E)}.$$

Tenendo conto del fatto che

$$\begin{aligned}\bar{C} \cap E &= \bar{C} \cap \left((\bar{A} \cap B \cap C) \cup (A \cap \bar{B} \cap C) \cup (A \cap B \cap \bar{C}) \right) \\ &= \left(\bar{C} \cap (\bar{A} \cap B \cap C) \right) \cup \left(\bar{C} \cap (A \cap \bar{B} \cap C) \right) \cup \left(\bar{C} \cap (A \cap B \cap \bar{C}) \right) \\ &= \emptyset \cup \emptyset \cup (A \cap B \cap \bar{C})\end{aligned}$$

si ottiene

$$P(\bar{C}|E) = \frac{P(\bar{C} \cap E)}{P(E)} = \frac{P(A \cap B \cap \bar{C})}{P(E)} = \frac{0,084}{0,452} = \frac{84}{452} = \frac{21}{113} \simeq 0,1858.$$

d) Consideriamo ora 10 diversi candidati, in cui ciascuno ha le stesse probabilità di successo come Paolo e che si comportano ciascuno indipendentemente dall'altro. Poniamo

$$X_A = \text{numero candidati che superano la prova scritta.}$$

Trovare la distribuzione di probabilità ed il valore atteso di X_A .

soluzione di d): La variabile aleatoria X_A ha distribuzione di probabilità binomiale di parametri $n = 10$ e $\theta = 0,7$ e quindi il valore atteso vale 7.

Infatti si tratta del numero di successi (successo = superamento della prova scritta) su 10 prove (prova i -esima = candidato i -esimo) e la probabilità di successo vale p_A come per Paolo, inoltre, per ipotesi, si tratta di prove indipendenti, in quanto i candidati si comportano indipendentemente gli uni dagli altri. Quindi $P(X_A = k) = \binom{10}{k} (0,7)^k (0,3)^{10-k}$, per $k = 0, 1, \dots, 10$, ed il valore atteso vale $n\theta = 10 \cdot 0,7 = 7$.

e) Nella stessa situazione del punto d), trovare il valore atteso e la varianza del numero Y dei candidati che superano tutte le tre prove.

soluzione di a): $\mathbb{E}(Y) = 3,36$ e $Var(Y) = 2,23104$.

Infatti si tratta ancora di una variabile aleatoria binomiale di parametri $n = 10$, ma questa volta con $\theta = 0,336$, come si è calcolato al punto a). Basta quindi applicare la formula $\mathbb{E}(Y) = n\theta = 10 \cdot 0,336 = 3,36$ e $Var(Y) = n\theta(1 - \theta) = 10 \cdot 0,336 \cdot 0,664 = 2,23104$

f) (facoltativo) Siano ora $X^{(i)}$ il numero dei candidati che superano i prove, per $i = 0, 1, 2, 3$. Scrivere l'espressione per calcolare

$$\mathbb{P}(X^{(1)} = 3, X^{(2)} = 2, X^{(3)} = 3).$$

soluzione di f): La probabilità cercata vale $\frac{10!}{2!3!2!3!} (0,024)^2 (0,188)^3 (0,452)^2 (0,336)^3$.

Infatti per cominciare,

$$\mathbb{P}(X^{(1)} = 3, X^{(2)} = 2, X^{(3)} = 3) = \mathbb{P}(X^{(0)} = 2, X^{(1)} = 3, X^{(2)} = 2, X^{(3)} = 3).$$

Inoltre si tratta di 10 prove (sempre i 10 candidati) a 4 esiti:

esito 0 il candidato non supera nessuna prova

esito 1 il candidato supera una sola prova

esito 2 il candidato supera esattamente due prove

esito 3 il candidato supera tutte e tre le prove

Per ipotesi le probabilità dell'esito i sono le stesse per ciascuna prova. Si tratta quindi di utilizzare il modello multinomiale (prove indipendenti a più esiti), per cui, posto p_i la probabilità di esito i , si ha

$$\mathbb{P}(X^{(0)} = 2, X^{(1)} = 3, X^{(2)} = 2, X^{(3)} = 3) = \frac{10!}{2!3!2!3!} (p_0)^2 (p_1)^3 (p_2)^2 (p_3)^3.$$

Infine si calcola facilmente che

$$p_0 = (1 - p_A) \cdot (1 - p_B) \cdot (1 - p_C) = 0,3 \cdot 0,4 \cdot 0,2 = 0,024,$$

$$p_1 = p_A \cdot (1 - p_B) \cdot (1 - p_C) + (1 - p_A) \cdot p_B \cdot (1 - p_C) + (1 - p_A) \cdot (1 - p_B) \cdot p_C = 0,188,$$

$$p_2 = p_A \cdot p_B \cdot (1 - p_C) + p_A \cdot (1 - p_B) \cdot p_C + (1 - p_A) \cdot p_B \cdot p_C = 0,452,$$

$$p_3 = p_A \cdot p_B \cdot p_C = 0,336.$$

si noti che

- p_2 è già stata calcolata nel punto **b)**: corrisponde all'esito di fallire esattamente una prova,
- p_3 è stata calcolata nel punto **a)**,
- $p_1 = 1 - (p_0 + p_2 + p_3) = 1 - (0,024 + 0,452 + 0,336) = 0,188$

Esercizio 2. Sia X una variabile aleatoria con funzione di densità di probabilità

data da

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x < -2 \\ k(x+2) & \text{per } -2 \leq x < 0 \\ k(2-x) & \text{per } 0 \leq x < 2 \\ 0 & \text{per } x \geq 2 \end{cases}$$

a) Calcolare il valore di k .

soluzione di a): La costante k vale $\frac{1}{4}$.

Infatti affinché $f(x)$ sia una densità di probabilità è necessario che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

ovvero, considerando che $f(x)$ vale zero per $|x| > 2$, e per la sua simmetria (ovvero¹ che $f(-x) = f(x)$)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-2}^{+2} f(x) dx = 2 \int_0^{+2} k(2-x) dx = 2k \left(\left(2x - \frac{x^2}{2}\right) \Big|_0^2 \right) = 2k(4-2) = 4k = 1$$

e quindi $k = 1/4$.

b) Calcolare $P(1 \leq X \leq 2)$.

soluzione di b): La probabilità cercata vale $\frac{1}{8}$.

Infatti

$$P(1 \leq X \leq 2) = \int_1^{+2} f(x) dx = \int_1^{+2} \frac{1}{4}(2-x) dx = \frac{1}{4} \left(\left(2x - \frac{x^2}{2}\right) \Big|_1^2 \right) = \frac{1}{4} \left((4-2) - \left(2 - \frac{1}{2}\right) \right) = \frac{1}{8}$$

¹ $f(-x) = f(x)$ è ovvio per $x > 2$, mentre $f(-x) = k((-x) + 2) = k(-x + 2) = f(x)$ per $0 \leq x \leq 2$

c) **Mostrare che** $\mathbb{E}(X) = 0$.

soluzione di c): svolgimento

Il fatto che il valore atteso sia nullo è ovvio per simmetria, infatti se $f(-x) = f(x)$ allora la funzione $h(x) = xf(x)$ gode della proprietà² che $h(-x) = -h(x)$ e quindi

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx = \int_{-2}^{+2} xf(x) dx = \int_{-2}^0 h(x) dx + \int_0^{+2} h(x) dx = 0.$$

Infatti, cambiando variabile di integrazione nel primo integrale (tra -2 e 0) e ponendo $y = -x$ si ha che quest'ultimo vale

$$\int_{-2}^0 h(x) dx = \int_{+2}^0 h(-y) (-1) dy = \int_0^{+2} h(-y) dy = \int_0^{+2} (-h(y)) dy = - \int_0^{+2} h(x) dx.$$

Alternativamente si possono effettuare i calcoli direttamente sulla funzione data, con gli stessi risultati.

d) **Mostrare che** $Var(X) = \frac{2}{3}$

soluzione di d): svolgimento

Infatti $Var(X) = \mathbb{E}[(X - \mu)^2] = \mathbb{E}[X^2]$, in quanto $\mu = \mathbb{E}[X] = 0$, e quindi, sempre per simmetria (questa volta di $x^2 f(x)$)

$$Var(X) = \int_{-2}^{+2} x^2 f(x) dx = 2 \int_0^{+2} x^2 f(x) dx = 2 \int_0^{+2} x^2 \frac{1}{4} (2-x) dx,$$

da cui

$$Var(X) = \frac{1}{2} \left(\int_0^{+2} (2x^2 - x^3) dx \right) = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^{+2} \right) = \frac{8}{3} - \frac{16}{8} = \frac{8}{3} - 2 = \frac{2}{3}.$$

e) **Siano** X_n , per $n = 1, \dots, 100$, **variabili aleatorie indipendenti e con la stessa legge di** X . **Calcolare approssimativamente** $\mathbb{P} \left(\left| \frac{1}{100} \sum_{n=1}^{100} X_n \right| > \frac{1}{\sqrt{600}} \right)$.

soluzione di e): La probabilità cercata vale approssimativamente $0,6170$.

Infatti, dal teorema centrale del limite sappiamo che, se $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, dove $\{X_k\}_{\{k \geq 1\}}$ è una successione di v.a. indipendenti identicamente distribuite, con valore atteso e varianza finite, e posto $Y_n = \frac{S_n}{n}$, si ha che

$$P \left(\left| \frac{S_n - n\mu}{n} \right| \leq \varepsilon \right) = P(\{|Y_n - \mu| \leq \varepsilon\}) \simeq 2\Phi \left(\sqrt{\frac{n}{\sigma^2}} \cdot \varepsilon \right) - 1$$

e quindi

$$P \left(\left| \frac{S_n - n\mu}{n} \right| > \varepsilon \right) = 1 - P \left(\left| \frac{S_n - n\mu}{n} \right| \leq \varepsilon \right) \simeq 1 - (2\Phi \left(\sqrt{\frac{n}{\sigma^2}} \cdot \varepsilon \right) - 1) = 2 \left(1 - \Phi \left(\sqrt{\frac{n}{\sigma^2}} \cdot \varepsilon \right) \right).$$

Nel nostro caso $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{600}}$, $n = 100$ e $\sigma^2 = \frac{2}{3}$, per cui si ha $\sqrt{\frac{n}{\sigma^2}} \cdot \varepsilon = \sqrt{\frac{100}{(2/3)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{600}} = \sqrt{\frac{100 \cdot 3}{2 \cdot 600}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} = 0.5$. Di conseguenza

$$\mathbb{P} \left(\left| \frac{1}{100} \sum_{n=1}^{100} X_n \right| > \frac{1}{\sqrt{600}} \right) \simeq 2 \left(1 - \Phi \left(\frac{1}{\sqrt{600}} \sqrt{\frac{100}{(2/3)}} \right) \right) = 2(1 - \Phi(0.5)) = 2(1 - 0,6915) = 0,6170.$$

² $h(-x) = -xf(-x) = -xf(x) = -h(x)$