Calcolo delle Probabilità 1 2004/05 - Laurea triennale
Foglio esercizi n.2bis

Consegnato venerdì 18 marzo 2005.
PREMESSA:
DAL SITO DELLA GAZZETTA DELLO SPORT del 17 marzo 2005:

SORTEGGIO LIBERO: Domani a Nyon, sede Uefa, l'ultimo sorteggio della stagione disegnerà quarti e semifinali di Champions come un tabellone tennistico: chi supera il turno, infatti, conoscerà già gli eventuali rivali di semifinale. E tutto potrà succedere: niente teste di serie, niente vincoli per nazione. Tradotto: sono possibili i derby. Secondo uno studio statistico, c'è quasi il 43% di possibilità[1] che due italiane siano sorteggiate contro. Finora queste sfide sono state 14 (12 con andata e ritorno, più 2 finali secche).

Oggi venerdì 18 marzo 2005 si faranno i sorteggi per i quarti di finale della Champions League.
Si ricorda che 3 club italiani sono nei quarti di Champions (Milan, Juve, Inter), e ci sono poi altre 5 squadre straniere (Chelsea, Liverpool, Bayern Monaco, Psv Eindhoven, Olympique Lione).

PROBLEMA: calcolare la probabilità che tutte e tre le squadre italiane incontrino una squadra straniera.

[1] Questo è un errore del redattore: avrebbe dovuto scrivere più correttamente c'è una probabilità quasi del 43%. Inoltre non è uno studio statistico, ma un semplice calcolo probabilistico.

RISPOSTA: la probabilità vale $4/7 \approx 0,5714 \approx 57\%$

Soluzione 1. (con la definizione dello spazio delle probabilità)

Possiamo considerare gli eventi elementari $\omega \in \Omega$ descritti nel seguente modo[2]:

$$\omega = (\{i_1, i_2\},\ \{i_3, i_4\},\ \{i_5, i_6\},\ \{i_7, i_8\}),$$

dove

$$i_k \in \mathcal{H} = \big\{\textit{Milan, Juve, Inter, Chelsea, Liverpool, Bayern Monaco, Psv Eindhoven, Olympique Lione}\big\},$$

e dove $\mathcal{H}_1 = \{i_1, i_2\}$ rappresenta la prima coppia **non ordinata** di squadre che viene estratta, $\mathcal{H}_2 = \{i_3, i_4\}$ rappresenta la seconda coppia, sempre non ordinata di squadre che viene estratta, $\mathcal{H}_3 = \{i_5, i_6\}$ la terza coppia, ed infine $\mathcal{H}_4 = \{i_7, i_8\}$ è la rimanente (e quarta) coppia. Ovviamente quindi

$$\mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_2 \cup \mathcal{H}_3 \cup \mathcal{H}_4 = \mathcal{H}$$

ed

$$\mathcal{H}_r \cap \mathcal{H}_s = \emptyset, \qquad r \neq s.$$

Prendiamo come probabilità la probabilità classica ovvero

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Cominciamo con trovare la cardinalità di Ω.
Mostreremo ora che

$$|\Omega| = \frac{8!}{2!\,2!\,2!\,2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}$$

Infatti, per specificare un elemento ω di *Omega* si deve prima di tutto specificare il sottoinsieme $\mathcal{H}_1 = \{i_1, i_2\}$ di cardinalità 2 dell'insieme delle 8 squadre, e ciò può essere fatto in

$$\binom{8}{2} = \frac{8!}{2!\,6!}$$

modi. Per ciascuna delle $\binom{8}{2}$ possibili scelte di $\mathcal{H}_1$, si tratta poi di specificare l'insieme $\mathcal{H}_2 = \{i_3, i_4\}$ di due elementi tra i rimanenti 6, e ciò può essere fatto in

$$\binom{6}{2} = \frac{6!}{2!\,4!}$$

modi. Per ciascuna delle

$$\binom{8}{2} \cdot \binom{6}{2} = \frac{8!}{2!\,6!} \cdot \frac{6!}{2!\,4!} = \frac{8!}{2!\,2!\,4!}$$

possibili scelte di $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$, si tratta ancora di specificare l'insieme $\mathcal{H}_3 = \{i_5, i_6\}$ di due elementi tra i rimanenti 4, e ciò può essere fatto in

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!\,2!}$$

[2] Alternativamente si possono considerare invece le permutazioni $(i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6, i_7, i_8)$ di tutte le squadre, con la convenzione che le prime due si scontrano fra di loro, lo stesso per la terza e la quarta, e così via. Si suggerisce di considerare anche questo modo. Ma bisogna FARE ATTENZIONE a descrivere bene successivamente l'insieme che caratterizza l'evento di cui interessa calcolare la probabilità.

modi. Per ciascuna delle

$$\binom{8}{2} \cdot \binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} = \frac{8!}{2!\,6!} \cdot \frac{6!}{2!\,4!} \cdot \frac{4!}{2!\,2!} = \frac{8!}{2!\,2!\,2!\,2!}$$

possibili scelte di $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_3$ rimane poi determinato univocamente l'insieme $\mathcal{H}_4$ come il complementare di $\mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_2 \cup \mathcal{H}_3$.

Per caratterizzare gli elementi ω dell'evento

$$E = \big\{\textit{le squadre italiane incontrano squadre straniere}\big\}$$

possiamo procedere così: l'evento E si verifica se e solo se uno degli insiemi $\mathcal{H}_r$ è tutto contenuto nell'insieme delle squadre straniere

$$\mathcal{S} = \big\{\textit{Chelsea, Liverpool, Bayern Monaco, Psv Eindhoven, Olympique Lione}\big\}$$

mentre, posto

$$\mathcal{I} = \big\{\textit{Milan, Juve, Inter}\big\}$$

i rimanenti tre insiemi $\mathcal{H}_s$, per $s \neq r$ sono composti da un elemento $i \in \mathcal{I}$ (da una squadra italiana) ed un altro elemento $j \in \mathcal{S}$ (da una squadra straniera).
Mostreremo ora che la cardinalità di E vale

$$|E| = 4 \cdot \binom{3}{1}\binom{5}{1} \cdot \binom{2}{1}\binom{4}{1} \cdot \binom{1}{1}\binom{3}{1} \cdot \binom{0}{0}\binom{2}{2} = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3,$$

con la convenzione che $\binom{0}{0} = 1$ (ragionevole perché l'unico sottoinsieme dell'insieme vuoto è l'insieme vuoto stesso).

Per capire la formula precedente basta capire che le 4 situazioni relative ad $\mathcal{H}_r = \mathcal{H}_1$ (in cui le prime estratte sono due squadre straniere, mentre poi si estraggono sempre una straniera ed una italiana), oppure $\mathcal{H}_r = \mathcal{H}_2$, oppure $\mathcal{H}_r = \mathcal{H}_3$ oppure $\mathcal{H}_r = \mathcal{H}_4$ hanno tutte lo stesso numero di elementi, e ciò spiega il fattore 4. Invece il numero

$$\binom{3}{1}\binom{5}{1} \cdot \binom{2}{1}\binom{4}{1} \cdot \binom{1}{1}\binom{3}{1} \cdot \binom{0}{0}\binom{2}{2}$$

è un modo (leggermente complicato) di contare il caso in cui le prime tre coppie di squadre sono formate da una italiana ed una straniera, mentre l'ultima necessariamente non ha nessuna squadra italiana e (quindi) ha due squadre straniere. Infatti la prima coppia non ordinata di una squadra italiana e di una straniera si può scegliere in $\binom{3}{1}\binom{5}{1}$ modi. Successivamente rimangono due squadre italiane e quattro straniere e i modi id sceglierne una italiana ed una straniera sono $\binom{2}{1}\binom{4}{1}$. A questo punto sono rimaste una squadra italiana e tre straniere e ci sono solo $\binom{1}{1}\binom{3}{1}$ modi di prenderne una italiana ed una straniera. Infine rimangono zero squadre italiane e due straniere e c'e' un solo modo (ovvero $\binom{0}{0}\binom{2}{2} = 1$) per formare una coppia non ordinata.

Per calcolare la probabilità di E basta perciò calcolare

$$\frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{7 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{4}{7}$$

Soluzione 2. (con la formula delle probabilità composte)

Siano S_J, S_M ed S_I gli eventi rispettivamente

$$\begin{aligned} S_J &= \{\text{la Juventus gioca contro una squadra straniera}\} \\ S_M &= \{\text{il Milan gioca contro una squadra straniera}\} \\ S_I &= \{\text{l'Inter gioca contro una squadra straniera}\} \end{aligned}$$

La probabilità cercata è quella dell'evento

$$S_J \cap S_M \cap S_I.$$

Per la formula delle probabilità composte si ha allora che

$$\mathbb{P}(S_J \cap S_M \cap S_I) = \mathbb{P}(S_J)\,\mathbb{P}(S_I|S_J)\,\mathbb{P}(S_I|S_J \cap S_M).$$

La Juventus può scontrarsi con una delle altre 7 squadre di cui 2 italiane e 5 straniere, quindi

$$\mathbb{P}(S_J) = \frac{5}{7}.$$

Sapendo che si è verificato S_J, ossia se la Juventus si scontra con una squadra straniera, allora il Milan può scontrarsi con una delle rimanenti 5 squadre, di cui 1 italiana (l'Inter) e 4 straniere, quindi

$$\mathbb{P}(S_I|S_J) = \frac{4}{5}.$$

Infine, **sapendo che** si sono verificati sia S_J che S_M, cioè che sia la Juventus che il Milan si scontrano con squadre straniere, allora sicuramente l'Inter si scontra con una squadra straniera, ovvero

$$\mathbb{P}(S_I|S_J \cap S_M) = 1$$

Riassumendo

$$\mathbb{P}(S_J \cap S_M \cap S_I) = \mathbb{P}(S_J)\,\mathbb{P}(S_I|S_J)\,\mathbb{P}(S_I|S_J \cap S_M) = \frac{5}{7} \cdot \frac{4}{5} \cdot 1 = \frac{4}{7}.$$