Calcolo delle Probabilità 1 2004/05 - Laurea triennale
Foglio esercizi n.10
Consegnato mercoledì 25 maggio 2005.
Consegnare le risposte entro mercoledì 1 giugno 2005.

1 Una moneta dà testa con probabilità p. La moneta viene tirata n volte e si osserva la percentuale $\bar{Y}_n$ di teste uscite su n lanci. Quanto deve essere grande n affinché con probabilità maggiore di 0.99 l'errore commesso (cioè la differenza tra p e $\bar{Y}_n$) sia al più 0.1?

2 Siano $X_1, \ldots, X_{100}$ variabili aleatorie indipendenti, ciascuna con la seguente distribuzione di probabilità

$$P\{X_j = 0\} = 0.45 - p \qquad P\{X_j = 1\} = 0.25$$
$$P\{X_j = 0.5\} = 0.3 \qquad P\{X_j = 2\} = p$$

dove $0 < p < 0.45$ è un parametro.

(a) Trovare il valore di p per cui risulta $E(X_j) = 1$.

(b) In corrispondenza al valore di p trovato nel precedente punto, calcolare la varianza di X_j.

(c) Ancora in corrispondenza allo stesso valore di p, posto

$$Y = \frac{\sum_{j=1}^{100} X_j}{100}$$

trovare la minorazione per la probabilità $P\{|Y-1| \leq \frac{1}{5}\sqrt{\frac{21}{40}}\}$ che si ottiene utilizzando la diseguaglianza di Chebyshev.

(d) Utilizzando il Teorema Limite Centrale, trovare un'approssimazione per

$$P\{|Y-1| \leq \frac{1}{5}\sqrt{\frac{21}{40}}\}$$

3 Sia $\{X_n\}_n$ una successione di coppie indipendenti con $E(X_i) = \frac{3}{2}$ e $Var(X_i) = \frac{3}{4}$ $\quad \forall i$ e sia $\{S_n\}_n$ la successione delle somme parziali:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

Usando la diseguaglianza di Chebyshev, stimare n affinché $P(|\frac{S_n}{n} - \frac{3}{2}| > 0.1) \leq 10^{-3}$.
Calcolare

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{2S_n - 3n}{\sqrt{n}} > 0\right).$$

4 Un ingegnere civile costruisce un ponte che può sopportare un peso massimo di 200 tonnellate. Si supponga che il peso (espresso in tonn.) di un'automobile si una variabile aleatoria di valore atteso 1 e deviazione standard 0.1. Quante auto devono transitare contemporaneamente sul ponte affinché con probabilità superiore a 0.1 venga superato il peso massimo sopportato dal ponte?

5 Il numero giornaliero di passeggeri da Milano a Firenze è una variabile aleatoria. Supponiamo che il valore atteso sia pari a 3000 e la deviazione standard pari a 500, si calcoli approssimativamente la probabilità che in 30 giorni il numero complessivo di viaggiatori sia almeno 100000.

6 Lancio un dado equilibrato finché non esce sei. Calcolare:

(a) la probabilità che sei esca al quarto lancio,

(b) la probabilità che sei esca in uno dei primi tre lanci,

(a) la probabilità che sei esca dopo il sesto lancio.

7 Massimo e Paolo giocano a carte per un totale di 10 partite. La probabilità di pareggio, in ogni partita è $\frac{1}{3}$; inoltre i due giocatori sono di eguale bravura e quindi le rispettive probabilità di vittoria sono identiche. Denominiamo con X_1 il numero aleatorio di vittorie di Massimo, con X_2 il numero di vittorie di Paolo ed infine con X_3 il numero di pareggi. Si supponga gli esiti delle partite indipendenti.

(a) Scrivere in termini delle variabili aleatorie (X_1, X_2, X_3) l'evento A che, sulle 10 partite giocate, Massimo vince (esattamente) 4 partite e che Paolo ne vinca (esattamente) 3, e scrivere l'espressione della probabilità di A.

(b) Individuare la distribuzione di X_1, e calcolare la probabilità che Paolo vinca (esattamente) 3 partite, sapendo che Massimo ne ha vinte (esattamente) 4.

(c) Individuare la distribuzione di $Y = X_2 + X_3$

(d) Calcolare $Cov(X_1, Y)$