Calcolo delle Probabilità 1 2004/05 - Laurea triennale
Foglio esercizi n.9 — Soluzioni

Esercizio 5. Sia X una variabile aleatoria con densità di probabilità data da

$$f_X(x) = \begin{cases} kx & \text{per } 0 \leq x \leq 1 \\ k(2-x) & \text{per } 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

a) Imponiamo la condizione di normalizzazione

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\mathrm{d}x = k\int_0^1 x\mathrm{d}x + k\int_1^2 (2-x)\mathrm{d}x =$$
$$= k\left(\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 - \left[\frac{(2-x)^2}{2}\right]_1^2\right) = k\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) = k$$

b) La funzione di distribuzione è data da

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & \text{per } x < 0 \\ \frac{x^2}{2} & \text{per } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 - \frac{(2-x)^2}{2} & \text{per } 1 < x \leq 2 \\ 1 & \text{per } x > 2 \end{cases}$$

c) La funzione di densità di $Y = -X+1$ è data da $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(-X+1 \leq y) = P(1-y \leq X) = 1 - P(X \leq 1-y) = 1 - F_X(1-y)$. Esplicitamente

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{per } y < -1 \\ \frac{(1+y)^2}{2} & \text{per } -1 \leq y \leq 0 \\ 1 - \frac{(1-y)^2}{2} & \text{per } 0 < y \leq 1 \\ 1 & \text{per } 1 < y \end{cases}$$

d) La densità di probabilità di Y è data da

$$f_Y(y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}F_Y(y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}(1 - F_X(1-y)) = f_X(1-y) = \begin{cases} 1+y & \text{per } -1 \leq y \leq 0 \\ 1-y & \text{per } 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

e quindi il valore di atteso di Y è dato da

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y\, f_Y(y)\mathrm{d}y = \int_{-1}^{0} y(1+y)\mathrm{d}y + \int_0^1 y(1-y)\mathrm{d}y =$$
$$= \int_{-1}^{0} y\mathrm{d}y + \int_{-1}^{0} y^2\mathrm{d}y + \int_0^1 y\mathrm{d}y - \int_0^1 y^2\mathrm{d}y =$$
$$= -\int_0^1 y\mathrm{d}y + \int_0^1 y^2\mathrm{d}y + \int_0^1 y\mathrm{d}y - \int_0^1 y^2\mathrm{d}y = 0.$$

In alternativa si osservi che la densità di probabilità è simmetrica rispetto a $x = 1$ e quindi $E(X) = 1$. Di conseguenza $E(Y) = -E(X) + 1 = -1 + 1 = 0$.

Esercizio 6. Si trova facilmente (vedi esercizio 1 del foglio 7) che $\mu = \frac{21}{20}$ e $\sigma^2 = \frac{89}{400}$. Quindi

$$P\left(\left\{\mu - \frac{1}{10} \leq Y_{100} \leq \mu + \frac{1}{10}\right\}\right) \simeq 2\Phi\left(\sqrt{\frac{n}{\sigma^2}}\epsilon\right) - 1 = 2\Phi\left(\sqrt{100\frac{400}{89}}\frac{1}{10}\right) - 1 =$$

$$= 2\Phi\left(\sqrt{\frac{400}{89}}\right) - 1 \simeq 2\Phi(2,1199) - 1 \simeq 2 \cdot 0,9826 - 1 = 0,9652$$