Calcolo delle Probabilità 1 2004/05 - Laurea triennale
(prof. Nappo e Spizzichino)
Foglio esercizi n.4

Consegnato venerdì 1 aprile 2005.
Consegnare le risposte entro mercoledì 6 aprile 2005.
Scrivere su ogni foglio NOME e COGNOME. Le risposte devono essere giustificate sui fogli protocollo e riportate nel foglio RISPOSTE.

ESERCIZIO 1. Due amici Alberto e Bruno sparano contemporaneamente ad un bersaglio. Alberto colpisce il bersaglio il 70% delle volte, mentre Bruno lo colpisce il 90%. Si supponga che gli eventi $A = \{$*Alberto colpisce il bersaglio*$\}$ e $B = \{$*Bruno colpisce il bersaglio*$\}$ siano indipendenti.
a) Calcolare la probabilità degli eventi
$E = \{$*entrambi colpiscono il bersaglio*$\}$
$F = \{$*solo* 1 *tra Alberto e Bruno colpisce il bersaglio*$\}$
$G = \{$*nessuno colpisce il bersaglio*$\}$
b) Sapendo che il bersaglio è stato colpito da un solo giocatore, calcolare la probabilità che il bersaglio sia stato colpito da Alberto.

ESERCIZIO 2. Un sacchetto contiene 4 palline rosse e 6 verdi. Si procede a due turni di estrazioni. (LE PALLINE ESTRATTE NON SONO MAI REINSERITE)
Nel primo turno si estraggono 2 palline **senza reinserimento**. Nel secondo turno si estraggono altre 2 palline **senza reinserimento**.
Si pongano
$H_k = \{$*nel primo turno vengono estratte (esattamente) k palline rosse* $\}$, per $k = 0, 1, 2$,
$G_l = \{$*nel secondo turno vengono estratte (esattamente) l palline rosse* $\}$, per $l = 0, 1, 2$.

a1) Calcolare $\mathbb{P}(H_k)$, per $k = 0, 1, 2$. (**N.B.** si intendono le probabilità a priori, cioè prima di effettuare qualsiasi estrazione)
a2) (**facoltativo**) Calcolare $\mathbb{P}(G_l)$, per $l = 0, 1, 2$. (**N.B.** si intendono le probabilità a priori, cioè prima di effettuare qualsiasi estrazione)
b1) Calcolare
$\mathbb{P}(G_1|H_0)$ e $\mathbb{P}(G_1 \cap H_0)$, $\quad \mathbb{P}(G_2|H_0)$ e $\mathbb{P}(G_2 \cap H_0)$, $\quad \mathbb{P}(G_2|H_1)$ e $\mathbb{P}(G_2 \cap H_1)$.
Si ponga E l'evento $\{$*nel secondo turno di estrazioni vengono estratte* ***più*** *palline rosse che nel primo turno*$\}$. (N.B. si intende un numero di palline rosse **strettamente** maggiore)
b2) Esprimere l'evento E in termini di H_k e G_l, e calcolare $\mathbb{P}(E)$.
c) Calcolare $\mathbb{P}(H_k|E)$ (e dire se H_k ed E sono correlati positivamente o negativamente), per $k = 0, 1, 2$.
IN ALTERNATIVA (se non si sa rispondere alla precedente domanda)
c′) Calcolare $\mathbb{P}(H_k|G_2)$ (e dire se H_k ed G_2 sono correlati positivamente o negativamente), per $k = 0, 1, 2$.

ESERCIZIO 3. Riformulare i testi degli esercizi precedenti in termini di X, la variable aleatoria che conta il numero di volte che Alberto colpisce il bersaglio, e di Y, la variable aleatoria che conta il numero di volte che Bruno colpisce il bersaglio (ESERCIZIO 1), e delle variabili aleatorie X=*numero di palline rosse estratte nel primo turno* ed Y=*numero di palline rosse estratte nel secondo turno* (ESERCIZIO 2, esclusa la parte relativa alla correlazione positiva o negativa).

Calcolo delle Probabilità 1 2004/05 - Laurea triennale - Foglio esercizi n.4
Consegnare le risposte entro mercoledì 6 aprile 2004.
NOME.. COGNOME..

ESERCIZIO 1.
a)
....
....
....
....

b)
....
....
....

ESERCIZIO 2.
a1)
....
....
....
....
a2)
....
....
....
....

b1)
....
....
....
....
....
....
....
b2)
....
....
....
....
....

c) □ IN ALTERNATIVA **c′)** □
....
....
....
....
....
....

Calcolo delle Probabilità 1 2004/05 - Laurea triennale
(prof. Nappo e Spizzichino)
Foglio esercizi n.4 - SOLUZIONI

ESERCIZIO 1. *Due amici Alberto e Bruno sparano contemporaneamente ad un bersaglio. Alberto colpisce il bersaglio il 70% delle volte, mentre Bruno lo colpisce il 90%. Si supponga che gli eventi* $A =\{\text{Alberto colpisce il bersaglio}\}$ *e* $B =\{\text{Bruno colpisce il bersaglio}\}$ *siano indipendenti.*
a) *Calcolare la probabilità degli eventi*
$E =\{\textit{entrambi colpiscono il bersaglio}\}$
$F =\{\textit{solo 1 tra Alberto e Bruno colpisce il bersaglio}\}$
$G =\{\textit{nessuno colpisce il bersaglio}\}$
Dai dati del problema si sa che $\mathbb{P}(A) = \frac{7}{10}$ e $\mathbb{P}(B) = \frac{9}{10}$. Poiché gli eventi A e B sono indipendenti si ha che
$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \frac{7}{10}\frac{9}{10} = \frac{63}{100}$
$\mathbb{P}(A \cap B^c) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B^c) = \frac{7}{10}\frac{1}{10} = \frac{7}{100}$
$\mathbb{P}(A^c \cap B) = \mathbb{P}(A^c)\mathbb{P}(B) = \frac{3}{10}\frac{9}{10} = \frac{27}{100}$
$\mathbb{P}(A^c \cap B^c) = \mathbb{P}(A^c)\mathbb{P}(B^c) = \frac{3}{10}\frac{1}{10} = \frac{3}{100}$.

Inoltre
$$E = A \cap B,$$
$$F = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B), \qquad \text{ovvero } F = (A \cup B)\setminus(A \cap B)$$
in quanto l'evento $\{$*solo* 1 *tra Alberto e Bruno colpisce il bersaglio*$\}$=$\{$*almeno* 1 *tra Alberto e Bruno colpisce il bersaglio, ma non tutti e due*$\}$ e infine
$$G = A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$$
e quindi
$$\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{63}{100},$$
$$\mathbb{P}(F) = \mathbb{P}((A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)) = \mathbb{P}(A \cap B^c) + \mathbb{P}(A^c \cap B) = \frac{7}{100} + \frac{27}{100} = \frac{34}{100},$$
oppure
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(F) &= \mathbb{P}((A \cup B) - \mathbb{P}(A \cap B)) = \big(\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)\big) - \mathbb{P}(A \cap B)\\ &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 2\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{7}{10} + \frac{9}{10} - 2\frac{63}{100} = \frac{34}{100},\end{aligned}$$
$$\mathbb{P}(G) = \mathbb{P}(A^c \cap B^c) = \frac{3}{100}$$
Alternativamente, tenendo conto che $G = (A \cup B)^c$ si poteva anche calcolare
$$\mathbb{P}(G) = \mathbb{P}((A\cup B)^c) = 1-\mathbb{P}((A\cup B)) = 1-\big(\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A\cap B)\big) = 1-(\frac{7}{10}+\frac{9}{10}-\frac{63}{100}) = \frac{3}{100}$$
b) ***Sapendo che*** *il bersaglio è stato colpito da un solo giocatore, calcolare la probabilità che il bersaglio sia stato colpito da Alberto.*
Si tratta di calcolare $\mathbb{P}(A|F) = \frac{\mathbb{P}(A\cap F)}{\mathbb{P}(F)}$. Si ha che $A \cap F = A \cap \big((A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)\big) = A \cap B^c$ e quindi
$$\mathbb{P}(A|F) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B^c)}{\mathbb{P}(A \cap B^c) + \mathbb{P}(A^c \cap B)} = \frac{\frac{7}{100}}{\frac{7}{100} + \frac{27}{100}} = \frac{7}{34}$$

ESERCIZIO 2. *Un sacchetto contiene 4 palline rosse e 6 verdi. Si procede a due turni di estrazioni. (LE PALLINE ESTRATTE NON SONO MAI REINSERITE)*
Nel primo turno si estraggono 2 palline ***senza reinserimento****. Nel secondo turno si estraggono altre 2 palline* ***senza reinserimento****.*
Si pongano
$H_k =${nel primo turno vengono estratte (esattamente) k palline rosse }, *per* $k = 0, 1, 2$,
$G_l =${nel secondo turno vengono estratte (esattamente) l palline rosse }, *per* $l = 0, 1, 2$.
a1) *Calcolare* $\mathbb{P}(H_k)$, *per* $k = 0, 1, 2$. *(****N.B.*** *si intendono le probabilità a priori, cioè prima di effettuare qualsiasi estrazione)*

Trattandosi di 2 estrazioni senza rimbussolamento, da un'urna che contiene 4 palline rosse e 6 verdi, si ha

$$\mathbb{P}(H_k) = \frac{\binom{4}{k}\binom{6}{2-k}}{\binom{10}{2}}$$

$$\mathbb{P}(H_0) = \frac{\binom{4}{0}\binom{6}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{1 \cdot 15}{45} = \frac{1}{3}; \ \mathbb{P}(H_1) = \frac{\binom{4}{1}\binom{6}{1}}{\binom{10}{2}} = \frac{4 \cdot 6}{45} = \frac{24}{45} = \frac{8}{15}; \ \mathbb{P}(H_2) = \frac{\binom{4}{2}\binom{6}{0}}{\binom{10}{2}} = \frac{6 \cdot 1}{45} = \frac{6}{45} = \frac{2}{15}$$

a2) *(****facoltativo****)Calcolare* $\mathbb{P}(G_l)$, *per* $l = 0, 1, 2$. *(****N.B.*** *si intendono le probabilità a priori, cioè prima di effettuare qualsiasi estrazione)*
Poiché si tratta delle probabilità a priori, e poiché per ogni l l'evento G_l è dello stesso tipo dell'evento H_l, ma relativo alla terza pallina estratta e alla quarta pallina estratta, invece che alla prima e alla seconda, deve essere

$$\mathbb{P}(G_l) = \mathbb{P}(H_l) \qquad \text{per ogni } l = 0, 1, 2.$$

Alternativamente si poteva calcolare direttamente

$$\mathbb{P}(G_l) = \sum_{k=0}^{2} \mathbb{P}(H_k)\mathbb{P}(G_l|H_k)$$

dove

$$\mathbb{P}(G_l|H_k) = \frac{\binom{4-k}{l}\binom{6-(2-k)}{2-l}}{\binom{8}{2}} = \frac{\binom{4-k}{l}\binom{4+k}{2-l}}{\binom{8}{2}},$$

in quanto dopo il primo turno di estrazioni sono rimaste nell'urna 8 palline, e se sappiamo che si è verificato H_k, cioè se sappiamo che nel primo turno ne sono state estratte k rosse, allora nell'urna sono rimaste $4 - k$ palline rosse e (quindi) $4 + k$ verdi.

$$\mathbb{P}(G_l) = \sum_{k=0}^{2} \frac{\binom{4}{k}\binom{6}{2-k}}{\binom{10}{2}} \frac{\binom{4-k}{l}\binom{4+k}{2-l}}{\binom{8}{2}},$$

ovvero

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(G_l) &= \frac{\binom{4}{0}\binom{6}{2-0}}{\binom{10}{2}} \frac{\binom{4-0}{l}\binom{4+0}{2-l}}{\binom{8}{2}} + \frac{\binom{4}{1}\binom{6}{2-1}}{\binom{10}{2}} \frac{\binom{4-1}{l}\binom{4+1}{2-l}}{\binom{8}{2}} + \frac{\binom{4}{2}\binom{6}{2-2}}{\binom{10}{2}} \frac{\binom{4-2}{l}\binom{4+2}{2-l}}{\binom{8}{2}}, \\
&= \frac{\binom{4}{0}\binom{6}{2}}{\binom{10}{2}} \frac{\binom{4}{l}\binom{4}{2-l}}{\binom{8}{2}} + \frac{\binom{4}{1}\binom{6}{1}}{\binom{10}{2}} \frac{\binom{3}{l}\binom{5}{2-l}}{\binom{8}{2}} + \frac{\binom{4}{2}\binom{6}{0}}{\binom{10}{2}} \frac{\binom{2}{l}\binom{6}{2-l}}{\binom{8}{2}}. \\
\mathbb{P}(G_0) &= \frac{\binom{4}{0}\binom{6}{2}}{\binom{10}{2}} \frac{\binom{4}{0}\binom{4}{2}}{\binom{8}{2}} + \frac{\binom{4}{1}\binom{6}{1}}{\binom{10}{2}} \frac{\binom{3}{0}\binom{5}{2}}{\binom{8}{2}} + \frac{\binom{4}{2}\binom{6}{0}}{\binom{10}{2}} \frac{\binom{2}{0}\binom{6}{2}}{\binom{8}{2}} \\
&= \frac{1}{\binom{10}{2}\binom{8}{2}} \big(1 \cdot 15 \cdot 1 \cdot 6 + 4 \cdot 6 \cdot 1 \cdot 10 + 6 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 15\big) \\
&= \frac{1}{45 \cdot 28} 6\big(15 + 40 + 15\big) = \frac{1}{3^2 \cdot 5 \cdot 2^2 \cdot 7} 3 \cdot 2 \cdot 70 = \frac{1}{3}. \\
\mathbb{P}(G_1) &= \frac{\binom{4}{0}\binom{6}{2}}{\binom{10}{2}} \frac{\binom{4}{1}\binom{4}{1}}{\binom{8}{2}} + \frac{\binom{4}{1}\binom{6}{1}}{\binom{10}{2}} \frac{\binom{3}{1}\binom{5}{1}}{\binom{8}{2}} + \frac{\binom{4}{2}\binom{6}{0}}{\binom{10}{2}} \frac{\binom{2}{1}\binom{6}{1}}{\binom{8}{2}} \\
&= \frac{1}{45 \cdot 28} \big(1 \cdot 15 \cdot 4 \cdot 4 + 4 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 5 + 6 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 6\big) \\
&= \frac{1}{45 \cdot 28} 3 \cdot 2^3 \big(5 \cdot 2 + 3 \cdot 5 + 3\big) = \frac{1}{45 \cdot 28} 3 \cdot 2^3 \cdot 28 = \frac{24}{45} = \frac{8}{15}.
\end{aligned}
$$

Di conseguenza

$$
\mathbb{P}(G_2) = 1 - \big(\mathbb{P}(G_0) + \mathbb{P}(G_1)\big) = 1 - \frac{5+8}{15} = \frac{2}{15}.
$$

b1) *Calcolare*
$\mathbb{P}(G_1|H_0)$ e $\mathbb{P}(G_1 \cap H_0)$, $\quad \mathbb{P}(G_2|H_0)$ e $\mathbb{P}(G_2 \cap H_0)$, $\quad \mathbb{P}(G_2|H_1)$ e $\mathbb{P}(G_2 \cap H_1)$.

Analogamente al punto precedente

$\mathbb{P}(G_1|H_0) = \frac{\binom{4}{1}\binom{4}{1}}{\binom{8}{2}} = \frac{4 \cdot 4}{28} = \frac{16}{28} = \frac{4}{7}$ e $\mathbb{P}(G_1 \cap H_0) = \mathbb{P}(H_0)\mathbb{P}(G_1|H_0) = \frac{15}{45}\frac{16}{28} = \frac{2^4 \cdot 3 \cdot 5}{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7} = \frac{4}{21}$,

$\mathbb{P}(G_2|H_0) = \frac{\binom{4}{2}\binom{4}{0}}{\binom{8}{2}} = \frac{6 \cdot 1}{28} = \frac{6}{28} = \frac{3}{14}$ e $\mathbb{P}(G_2 \cap H_0) = \mathbb{P}(H_0)\mathbb{P}(G_2|H_0) = \frac{15}{45}\frac{6}{28} = \frac{2 \cdot 3^2 \cdot 5}{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7} = \frac{1}{14}$,

$\mathbb{P}(G_2|H_1) = \frac{\binom{3}{2}\binom{5}{0}}{\binom{8}{2}} = \frac{3 \cdot 1}{28} = \frac{3}{28}$ e $\mathbb{P}(G_2 \cap H_1) = \mathbb{P}(H_1)\mathbb{P}(G_2|H_1) = \frac{24}{45}\frac{3}{28} = \frac{2^3 \cdot 3^2}{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7} = \frac{2}{35}$.

Si ponga E l'evento {nel secondo turno di estrazioni vengono estratte **più** palline rosse che nel primo turno}.
*(N.B. si intende un numero di palline rosse **strettamente** maggiore)*

b2) *Esprimere l'evento E in termini di H_k e G_l, e calcolare $\mathbb{P}(E)$.*

L'evento

$$
E = (G_1 \cap H_0) \cup (G_2 \cap H_0) \cup (G_2 \cap H_1)
$$

in quanto si verifica solo se al primo turno si estraggono tutte palline verdi e al secondo turno si estraggono 1 pallina rossa oppure 2 palline rosse o ancora se al primo turno si estrae 1 pallina rossa e al secondo turno se ne estraggono 2. Di conseguenza

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(E) &= \mathbb{P}(G_1 \cap H_0) + \mathbb{P}(G_2 \cap H_0) + \mathbb{P}(G_2 \cap H_1) = \frac{15}{45}\frac{16}{28} + \frac{15}{45}\frac{6}{28} + \frac{24}{45}\frac{3}{28} \\ &= \frac{1}{45 \cdot 28}\big(15 \cdot 16 + 15 \cdot 6 + 24 \cdot 3\big) = \frac{1}{45 \cdot 28}\big(15 \cdot 22 + 72\big) = \frac{330 + 72}{3^2 \cdot 5 \cdot 2^2 \cdot 7} \\ &= \frac{402}{3^2 \cdot 5 \cdot 2^2 \cdot 7} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 67}{3^2 \cdot 5 \cdot 2^2 \cdot 7} = \frac{67}{210}\end{aligned}$$

c) *Calcolare $\mathbb{P}(H_k|E)$ (e dire se H_k ed E sono correlati positivamente o negativamente), per $k = 0, 1, 2$.*

Si ha ovviamente che $\mathbb{P}(H_k|E) = \frac{\mathbb{P}(H_k \cap E)}{\mathbb{P}(E)}$, e quindi

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(H_0|E) &= \frac{\mathbb{P}(H_0 \cap [(G_1 \cap H_0) \cup (G_2 \cap H_0) \cup (G_2 \cap H_1)])}{\mathbb{P}(G_1 \cap H_0) + \mathbb{P}(G_2 \cap H_0) + \mathbb{P}(G_2 \cap H_1)} \\ &= \frac{\mathbb{P}((G_1 \cap H_0) \cup (G_2 \cap H_0))}{\mathbb{P}(G_1 \cap H_0) + \mathbb{P}(G_2 \cap H_0) + \mathbb{P}(G_2 \cap H_1)} = \frac{\mathbb{P}((G_1 \cap H_0) + \mathbb{P}(G_2 \cap H_0)}{\mathbb{P}(G_1 \cap H_0) + \mathbb{P}(G_2 \cap H_0) + \mathbb{P}(G_2 \cap H_1)} \\ &= \frac{\frac{15}{45}\frac{16}{28} + \frac{15}{45}\frac{6}{28}}{\frac{15}{45}\frac{16}{28} + \frac{15}{45}\frac{6}{28} + \frac{24}{45}\frac{3}{28}} = \frac{15 \cdot 16 + 15 \cdot 6}{15 \cdot 16 + 15 \cdot 6 + 24 \cdot 3} = \frac{330}{330 + 72} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11}{2 \cdot 3 \cdot 67} = \frac{55}{67};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(H_1|E) &= \frac{\mathbb{P}(H_1 \cap [(G_1 \cap H_0) \cup (G_2 \cap H_0) \cup (G_2 \cap H_1)])}{\mathbb{P}(G_1 \cap H_0) + \mathbb{P}(G_2 \cap H_0) + \mathbb{P}(G_2 \cap H_1)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(G_2 \cap H_1))}{\mathbb{P}(G_1 \cap H_0) + \mathbb{P}(G_2 \cap H_0) + \mathbb{P}(G_2 \cap H_1)} \\ &= \frac{\frac{24}{45}\frac{3}{28}}{\frac{15}{45}\frac{16}{28} + \frac{15}{45}\frac{6}{28} + \frac{24}{45}\frac{3}{28}} = \frac{24 \cdot 3}{15 \cdot 16 + 15 \cdot 6 + 24 \cdot 3} = \frac{72}{330 + 72} = \frac{2^3 \cdot 3^2}{2 \cdot 3 \cdot 67} = \frac{12}{67};\end{aligned}$$

Come del resto si poteva dedurre subito considerando che infine deve essere

$$\mathbb{P}(H_2|E) = 0\Big(= \frac{\mathbb{P}(H_2 \cap E)}{\mathbb{P}(E)}\Big),$$

in quanto, **se** al secondo turno sono uscite un numero di palline strettamente maggiore rispetto al primo turno, allora è impossibile che al primo turno siano uscite 2 palline rosse (alternativamente poiché $\mathbb{P}(H_2 \cap E) = 0$), e quindi

$$\mathbb{P}(H_1|E) = 1 - \mathbb{P}(H_0|E) = 1 - \frac{55}{67} = \frac{12}{67}.$$

Essendo

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(H_0|E) &= \frac{55}{67} > \mathbb{P}(H_0) = \frac{1}{3} \\ \mathbb{P}(H_1|E) &= \frac{12}{67} < \mathbb{P}(H_1) = \frac{8}{15} \\ \mathbb{P}(H_2|E) &= 0 < \mathbb{P}(H_2) = \frac{2}{15}\end{aligned}$$

risulta che H_0 è correlato positivamente con E, mentre H_1, così come H_2, è correlato negativamente con E.

IN ALTERNATIVA (se non si sa rispondere alla precedente domanda)
c′) *Calcolare* $\mathbb{P}(H_k|G_2)$ *(e dire se* H_k *ed* G_2 *sono correlati positivamente o negativamente), per* $k = 0, 1, 2$.
Si tratta di calcolare
$$\mathbb{P}(H_k|G_2) = \frac{\mathbb{P}(H_k)\mathbb{P}(G_2|H_k)}{\mathbb{P}(G_2)}$$
utilizzando le espressioni delle probabilità $\mathbb{P}(H_k)$ e $\mathbb{P}(G_2|H_k)$ coinvolte, e la cui espressione è stata calcolata nei punti precedenti (punti **a1)** e **a2)**).
Effettuati i conti si ha che

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(H_0|G_2) &= \frac{\mathbb{P}(H_0)\mathbb{P}(G_2|H_0)}{\mathbb{P}(G_2)} = \frac{15}{28}\\ \mathbb{P}(H_1|G_2) &= \frac{\mathbb{P}(H_1)\mathbb{P}(G_2|H_1)}{\mathbb{P}(G_2)} = \frac{12}{28}\\ \mathbb{P}(H_2|G_2) &= \frac{\mathbb{P}(H_2)\mathbb{P}(G_2|H_2)}{\mathbb{P}(G_2)} = \frac{1}{28}.\end{aligned}$$

È interessante notare che ci si poteva aspettare questo risultato in quanto, per motivi di simmetria (scambiando il ruolo della prima e della seconda pallina estratta con quello della terza e della quarta pallina estratta il risultato non cambia) deve essere

$$\mathbb{P}(H_k|G_2) = \mathbb{P}(G_k|H_2) = \frac{\binom{2}{k}\binom{6}{2-k}}{\binom{8}{2}} = \frac{\binom{2}{k}\binom{6}{2-k}}{\binom{8}{2}} = \begin{cases} \frac{1\cdot 15}{28} = \frac{15}{28} & \text{se } k = 0,\\ \frac{2\cdot 6}{28} = \frac{12}{28} & \text{se } k = 1,\\ \frac{1\cdot 1}{28} = \frac{1}{28} & \text{se } k = 2.\end{cases}$$

Essendo

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(H_0|G_2) &= \frac{15}{28} > \mathbb{P}(H_0) = \frac{1}{3}\\ \mathbb{P}(H_1|G_2) &= \frac{12}{28} < \mathbb{P}(H_1) = \frac{8}{15}\\ \mathbb{P}(H_2|G_2) &= \frac{1}{28} < \mathbb{P}(H_2) = \frac{2}{15}\end{aligned}$$

risulta che H_0 è correlato positivamente con G_2, mentre H_1, così come H_2, è correlato negativamente con G_2.

ESERCIZIO 3: RIFORMULAZIONE DEGLI ESERCIZI PRECEDENTI

ESERCIZIO 1. Due amici Alberto e Bruno sparano contemporaneamente ad un bersaglio. Alberto colpisce il bersaglio il 70% delle volte, mentre Bruno lo colpisce il 90%. Si supponga che gli eventi $A=\{$*Alberto colpisce il bersaglio*$\}$ e $B=\{$*Bruno colpisce il bersaglio*$\}$ siano indipendenti.
Sia X la variable aleatoria che conta il numero di volte che Alberto colpisce il bersaglio ed Y la variable aleatoria che conta il numero di volte che Bruno colpisce il bersaglio
a) Posto $Z = X + Y$ calcolare la densità discreta della variabile aleatoria Z
b) Sapendo che $Z = 1$, calcolare la probabilità che $X = 1$.

ESERCIZIO 2. Un sacchetto contiene 4 palline rosse e 6 verdi. Si procede a due turni di estrazioni. (LE PALLINE ESTRATTE NON SONO MAI REINSERITE)
Nel primo turno si estraggono 2 palline **senza reinserimento**. Nel secondo turno si estraggono altre 2 palline **senza reinserimento**.
Si ponga X=*numero di palline rosse estratte nel primo turno* ed Y=*numero di palline rosse estratte nel secondo turno*.

a1) Calcolare la densità discreta di X. (**N.B.** si intende rispetto alla probabilità a priori, cioè prima di effettuare qualsiasi estrazione)
a2) (**facoltativo**) Calcolare la densità discreta di Y. (**N.B.** si intende rispetto alla probabilità a priori, cioè prima di effettuare qualsiasi estrazione)

b1) Calcolare
$\mathbb{P}(Y = 1|X = 0)$ e $\mathbb{P}(Y = 1, X = 0)$,
$\mathbb{P}(Y = 2|X = 0)$ e $\mathbb{P}(Y = 2, X = 0)$,
$\mathbb{P}(Y = 2|X = 1)$ e $\mathbb{P}(Y = 2, X = 1)$.

Si ponga E l'evento $\{Y > X\}$.

b2) Esprimere l'evento E in termini degli eventi $\{X = k\}$ e $\{Y = l\}$, e calcolare $\mathbb{P}(E)$.

c) Calcolare $\mathbb{P}(X = k|Y > X)$, per $k = 0, 1, 2$, ovvero **la densità discreta di X condizionata all'evento** $E = \{Y > X\}$.
IN ALTERNATIVA (se non si sa rispondere alla precedente domanda)
c′) Calcolare **la densità discreta di X condizionata ad** $Y = 2$, ovvero $\mathbb{P}(X = k|Y = 2)$, per $k = 0, 1, 2$.