Corso di Laurea Triennale in Matematica

Corso di Calcolo delle Probabilità 1 (docenti G. Nappo, F. Spizzichino)

prova scritta 20 giugno 2005 (tempo a disposizione: 3 ore)

La prova scritta consiste nello svolgimento dei punti non facoltativi dei diversi Esercizi. Inoltre, a scelta dallo studente, va svolto almeno uno fra tutti i punti indicati come facoltativi.

Scrivere su ogni foglio NOME e COGNOME.

Le risposte devono essere giustificate sui fogli protocollo e riportate nel foglio RISPOSTE.

Esercizio 1. Caio gioca al seguente gioco del lotto semplificato: da un'urna che contiene 10 palline numerate da 1 a 10, si estraggono **senza reinserimento** 4 palline. Caio punta sulla coppia di numeri $\{5, 10\}$. Sia X la variabile aleatoria che conta quanti numeri indovina Caio, ossia quanti fra i numeri $\{5, 10\}$ vengono estratti.

a) Individuare il tipo di distribuzione di X, e mostrare che il valore atteso $E(X)$ vale $\frac{4}{5}$.

b) Mostrare che la varianza di X vale $\frac{32}{75}$.

Anche Tizio e Sempronio giocano insieme a Caio. Tizio punta sulla terna di numeri $\{1,\ 5,\ 10\}$, e sia Y la variabile aleatoria che conta i numeri indovinati da Tizio. Invece Sempronio lancia una moneta ben equilibrata: se esce testa punta sulla coppia $\{5,\ 10\}$, mentre se esce croce punta sulla terna di numeri $\{1,\ 5,\ 10\}$. Sia Z la variabile aleatoria che conta quanti sono i numeri indovinati da Sempronio.

c) Scrivere in termini degli eventi $T = \{\text{esce testa}\}$ e $C = \{\text{esce croce}\}$ e delle variabili aleatorie X e Y, i seguenti eventi E, F, G ed A, e calcolarne le probabilità:

$$E = \{\textit{Caio non indovina neanche un numero}\}$$

$$F = \{\textit{Tizio non indovina neanche un numero}\}$$

$$G = \{\textit{Sempronio non indovina neanche un numero}\}$$

$$A = \{\textit{sia Caio che Sempronio non indovinano neanche un numero}\}$$

d) Sapendo che Sempronio non ha indovinato neanche un numero, calcolare la probabilità che sia uscita testa e la probabilità che sia uscita croce.

Esercizio 2. X ed Y sono due variabili aleatorie che assumono valore negli insiemi $\{1, 2, 3, 4\}$ e $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$, rispettivamente. La loro distribuzione di probabilità congiunta è individuata dalla seguente tabella

$X \backslash Y$	0	$\frac{1}{2}$	1
1	c	$2\,c$	$3\,c$
2	0	c	0
3	c	0	c
4	0	c	0

a) Determinare il valore della costante c.

b) Calcolare la distribuzione marginale di Y.

c) Determinare la distribuzione condizionata di Y dato $\{X = 1\}$.

d) Le variabili aleatorie X ed Y sono indipendenti?

e) Determinare la distribuzione di probabilità della variabile aleatoria $Z = X + Y$.

f)(facoltativo) Calcolare il valore atteso della variabile aleatoria $Z = X + Y$.

Esercizio 3. X è una variabile aleatoria tale che, per un'opportuna costante $K > 0$, ammette una densità della forma

$$f(x) = \begin{cases} K \cdot 3\,x^2 & \text{per} \quad 0 \le x \le 2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

a) Determinare il valore di K

b) Determinare la funzione di distribuzione di X, e disegnarne il grafico.

c) (facoltativo) Calcolare la varianza di X.

Esercizio 4. Una moneta equilibrata viene lanciata n volte. Per ogni $k \le n$ poniamo $X_k = 1$ se il k-esimo lancio ha dato testa e $X_k = 0$ se ha dato croce. Indichiamo con $\bar{X}_n = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)$ la proporzione di teste negli n lanci.

a) Usando la disuguaglianza di Chebyshev, trovare una minorazione per $\mathrm{P}(|\bar{X}_n - \frac{1}{2}| \le 0.1)$, per $n = 900$;

b) Usando l'approssimazione normale, calcolare approssimativamente $\mathrm{P}(\bar{X}_n \ge 0.51)$, per $n = 900$;

c) (facoltativo) Usando l'approssimazione normale, calcolare approssimativamente

$$\mathrm{P}(|\bar{X}_n - \tfrac{1}{2}| \le 0.01), \qquad \textit{per} \qquad n = 900;$$

d) (facoltativo) stimare quanto deve essere grande n perché sia

$$\mathrm{P}(|\bar{X}_n - \tfrac{1}{2}| \le 0.01) \ge 0.95.$$

Corso di Laurea Triennale in Matematica

Calcolo delle Probabilità 1

prova scritta di lunedì 20 giugno 2005 - FOGLIO RISPOSTE

NOME E COGNOME ....

Esercizio 1 **a)** La distribuzione di X è di tipo ....

Dimostrazione dell'identità $E(X) = \frac{4}{5}$ svolta ☐ non svolta ☐

b) Dimostrazione dell'identità $Var(X) = \frac{32}{75}$ svolta ☐ non svolta ☐

c) $E =$ .... $F =$ .... $G =$ ....

$P(E) =$ .... $P(F) =$ .... $P(G) =$ ....

$A =$ .... $P(A) =$..........................

d) $P(T|G) =$ .... $P(C|G) =$ ....

Esercizio 2 **a)** $c =$...............

b) la distribuzione marginale di Y è data da

y	0	$\frac{1}{2}$	1
$P(Y = y)$	....	....	....

c) la distrib. condizionata di Y dato $\{X = 1\}$ è data da

y	0	$\frac{1}{2}$	1
....	....	....	....

d) X e Y sono stocasticamente indipendenti? SI ☐ NO ☐

e) la distribuzione di Z è data da

....

....

....

....

f) (facoltativo) $\mathbb{E}(Z) =$ ....

Esercizio 3 **a)** $K =$ ....

b) grafico F SI ☐ NO ☐; $F(x) = \begin{cases} \text{.......................................} \\ \text{.......................................} \\ \text{.......................................} \end{cases}$

c) (facoltativo) $Var(X) =$ ....

Esercizio 4 **a)** Con la disuguaglianza Chebyshev si ottiene $P\{|\overline{X}_{900} - \frac{1}{2}| \leq 0.1\}$ ....

b) Con l'approssimazione normale si ottiene $P\{\overline{X}_{900} \geq 0.51\} \simeq$ ....

c) (facoltativo) Con l'approssimazione normale si ottiene $P\{|\overline{X}_{900} - \frac{1}{2}| \leq 0.01\} \simeq$ ....

d) (facoltativo) $n \geq$ ....

Corso di Laurea Triennale in Matematica

Corso di Calcolo delle Probabilità 1

A. A. 2004/2005

Soluzioni della prova scritta del 20 giugno 2005 (docenti G. Nappo, F. Spizzichino)

Esercizio 1. ***Caio gioca al seguente gioco del lotto semplificato: da un'urna che contiene*** 10 ***palline numerate da*** 1 ***a*** 10***, si estraggono senza reinserimento*** 4 ***palline. Caio punta sulla coppia di numeri*** $\{5, 10\}$***. Sia*** X ***la variabile aleatoria che conta quanti numeri indovina Caio, ossia quanti fra i numeri*** $\{5, 10\}$ ***vengono estratti.***

a) Individuare il tipo di distribuzione di X***, e mostrare che il valore atteso*** $E(X)$ ***vale*** $\frac{4}{5}$***.***

Soluzione: La variabile aleatoria X ha distribuzione ipergeometrica di parametri $M = 10$ $m_1 = 2$ ed $n = 4$, infatti possiamo considerare che si tratta di $n = 4$ estrazioni senza reinserimento da un'urna che contiene $M = 10$ palline, di cui di tipo A le due palline contraddistinte da *5*, *e 10*.
Per mostrare che il valore atteso di X vale $\frac{4}{5}$, si può procedere in due modi:

I MODO: considerando che $X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$, dove X_j è la variabile aleatoria binaria che vale 1 se si verifica l'evento $C_j = \{la\ j\text{-}sima\ pallina\ estratta\ \grave{e}\ di\ tipo\ A\}$, e 0 altrimenti, per cui

$$E(X) = E(X_1 + X_2 + X_3 + X_4) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) + E(X_4) = 4\,P(C_1) = 4\,\frac{2}{10} = \frac{4}{5}$$

II MODO: calcolando esplicitamente la densità discreta: la variabile aleatoria X assume solo i valori 0,1 e 2, e con probabilità

$$P(X=0) = \frac{\binom{2}{0}\binom{8}{4}}{\binom{10}{4}} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}\,\frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7} = \frac{\cdot 6\cdot 5}{10\cdot 9} = \frac{5}{15}$$
$$P(X=1) = \frac{\binom{2}{1}\binom{8}{3}}{\binom{10}{4}} = \frac{2\,\cdot\,8\cdot 7\cdot 6}{1\,\cdot\,3\cdot 2\cdot 1}\,\frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7} = \frac{2\cdot 6\cdot 4}{10\cdot 9} = \frac{8}{15}$$
$$P(X=2) = \frac{\binom{2}{2}\binom{8}{2}}{\binom{10}{4}} = \frac{2\cdot 1\,\cdot\,8\cdot 7}{2\cdot 1\,\cdot\,2\cdot 1}\,\frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7} = \frac{4\cdot 3}{10\cdot 9} = \frac{2}{15}$$

da cui

$$E(X) = 0\,P(X=0) + 1\,P(X=1) + 2\,P(X=2) = \frac{8}{15} + 2\,\frac{2}{15} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$$

b) Mostrare che la varianza di X ***vale*** $\frac{32}{75}$***.***

Soluzione: si può procedere in due modi:

I MODO: considerando che la varianza di una ipergeometrica di parametri M, m_1 ed n vale, posto $p = \frac{m_1}{M}$,

$$Var(X) = n\,p(1-p)\left(1 - \frac{n-1}{M-1}\right) = 4\,\tfrac{2}{10}\,\tfrac{8}{10}\left(1 - \tfrac{3}{9}\right) = \tfrac{16}{25}\,\tfrac{2}{3} = \tfrac{32}{75}$$

I MODO bis: considerando che $X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$, dove X_j è la variabile aleatoria binaria che vale 1 se si verifica l'evento $C_j = \{la\ j\text{-}sima\ pallina\ estratta\ \grave{e}\ di\ tipo\ A\}$, e 0 altrimenti, per cui

$$\begin{aligned}
Var(X) &= Var(X_1) + Var(X_2) + Var(X_3) + Var(X_4)\\
&\quad + 2\,Cov(X_1, X_2) + 2\,Cov(X_1, X_3) + 2\,Cov(X_1, X_4)\\
&\quad + 2\,Cov(X_2, X_3) + 2\,Cov(X_2, X_4) + 2\,Cov(X_3, X_4)\\
&= 4\,P(C_1)\big(1 - P(C_1)\big) + 12\,\Big(P(C_1 \cap C_2) - P(C_1)\cdot P(C_2)\Big)\\
&= 4\,\frac{2}{10}\,\frac{8}{10} + 12\,\left(\frac{2}{10}\,\frac{1}{9} - \frac{2}{10}\,\frac{2}{10}\right) = 4\,\frac{2}{10}\,\left[\frac{8}{10} + 3\,\left(\frac{1}{9} - \frac{2}{10}\right)\right]\\
&= \frac{4}{5}\,\left[\frac{4}{5} + 3\,\left(\frac{5-9}{45}\right)\right] = \frac{4}{5}\,\left[\frac{4}{5} - \frac{4}{15}\right] = \left(\frac{4}{5}\right)^2\,\frac{2}{3} = \frac{32}{75}
\end{aligned}$$

II MODO: Utilizzando il fatto che $Var(X) = E\big((X - E(X))^2\big) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2$ e calcolando direttamente che

$$E(X^2) = 0\,P(X=0) + 1^2\,P(X=1) + 2^2\,P(X=2) = \frac{8}{15} + 4\,\frac{2}{15} = \frac{16}{15}$$

$$Var(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2 = \frac{16}{15} - \frac{16}{25} = \frac{16\cdot 5 - 16\cdot 3}{75} = \frac{16\cdot(5-3)}{75} = \frac{32}{75}$$

Anche Tizio e Sempronio giocano insieme a Caio. Tizio punta sulla terna di numeri $\{1,\, 5,\, 10\}$***, e sia*** Y ***la variabile aleatoria che conta i numeri indovinati da Tizio. Invece Sempronio lancia una moneta ben equilibrata: se esce testa punta sulla coppia*** $\{5,\, 10\}$***, mentre se esce croce punta sulla terna di numeri*** $\{1,\, 5,\, 10\}$***. Sia*** Z ***la variabile aleatoria che conta quanti sono i numeri indovinati da Sempronio.***

c) Scrivere in termini degli eventi $T = \{$***esce testa***$\}$ ***e*** $C = \{$***esce croce***$\}$ ***e delle variabili aleatorie*** X ***e*** Y***, i seguenti eventi*** E***,*** F***,*** G ***ed*** A***, e calcolarne le probabilità:***

$$E = \{\textit{Caio non indovina neanche un numero}\} \qquad F = \{\textit{Tizio non indovina neanche un numero}\}$$

$$G = \{\textit{Sempronio non indovina neanche un numero}\}$$

$$A = \{\textit{sia Caio che Sempronio non indovinano neanche un numero}\}$$

Soluzione:

$$E = \{X = 0\} \qquad F = \{Y = 0\} \qquad G = \big(T \cap \{X = 0\}\big) \cup \big(C \cap \{Y = 0\}\big), \qquad A = G.$$

Si noti che l'uguaglianza $A = G$ deriva immediatamente dal fatto che

$$A = E \cap G = \{X = 0\} \cap \Big(\big(T \cap \{X = 0\}\big) \cup \big(C \cap \{Y = 0\}\big)\Big) = \big(T \cap \{X = 0\}\big) \cup \big(C \cap \{Y = 0\}\big),$$

in quanto $\{X = 0\} \cap \{Y = 0\} = \{X = 0\}$. Dalle precedenti relazioni segue immediatamente che

$$P(E) = P(X = 0) = \tfrac{1}{3} \qquad P(F) = P(Y = 0) = \frac{\binom{3}{0}\binom{7}{4}}{\binom{10}{4}} = \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}\,\frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7} = \frac{6\cdot 5\cdot 4}{10\cdot 9\cdot 8} = \frac{1}{6}$$

$$P(G) = P(A) = P\big((T \cap \{X = 0\}\big) + P\big(C \cap \{Y = 0\}\big) = \tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{6} = \tfrac{1}{4}$$

d) Sapendo che Sempronio non ha indovinato neanche un numero, calcolare la probabilità che sia uscita testa e la probabilità che sia uscita croce.

Soluzione: $P(T|G) = \frac{2}{3}$ e $P(C|G) = \frac{1}{3}$.

Infatti si tratta di calcolare $P(T|G)$ e $P(C|G) = 1 - P(T|G)$. Per cui basta mostrare che $P(T|G) = \frac{2}{3}$ che automaticamente si ha il valore di $P(C|G)$.

$$P(T|G) = \frac{P(T \cap G)}{P(G)} = \frac{P(T \cap \{X=0\})}{P\big(\big(T \cap \{X=0\}\big) + P\big(C \cap \{Y=0\}\big)} = \frac{\frac{1}{2}\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\frac{1}{6}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3} + \frac{1}{6}} = \frac{2}{3}$$

Esercizio 2. ***X ed Y sono due variabili aleatorie che assumono valore negli insiemi $\{1, 2, 3, 4\}$ e $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$, rispettivamente. La loro distribuzione di probabilità congiunta è individuata dalla seguente tabella***

$X\backslash Y$	0	$\frac{1}{2}$	1
1	c	$2\,c$	$3\,c$
2	0	c	0
3	c	0	c
4	0	c	0

a) Determinare il valore della costante c.

Soluzione: $c = \frac{1}{10} = 0.1$

Infatti

$$\sum_i \sum_j P(X = x_i, Y = y_j) = (c + 2\,c + 3\,c) + c + (c + c) + c = 10\,c = 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad c = \tfrac{1}{10}.$$

b) Calcolare la distribuzione marginale di Y.

Soluzione:

y	0	$\frac{1}{2}$	1
$P(Y = y)$	$\frac{2}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{4}{10}$

come è immediato notando che

$$P(Y = 0) = c + c = 2\,c, \qquad P(Y = \tfrac{1}{2}) = 2\,c + c + c = 4\,c, \qquad P(Y = 1) = 3\,c + c = 4\,c.$$

c) Determinare la distribuzione condizionata di Y dato $\{X = 1\}$.

Soluzione:

y	0	$\frac{1}{2}$	1
$P(Y = y \mid X = 1) = \frac{P(X=1,Y=y)}{P(X=1)}$	$\frac{c}{6c} = \frac{1}{6}$	$\frac{2c}{6c} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$	$\frac{3c}{6c} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Infatti si tratta solo di osservare che

$$P(X = 1) = P(X = 1, Y = 0) + P(X = 1, Y = \tfrac{1}{2}) + P(X = 1, Y = 1) = c + 2\,c + 3\,c = 6c.$$

d) Le variabili aleatorie X ed Y sono indipendenti?

Soluzione: X ed Y non sono indipendenti, infatti ad esempio $P(X = 2, Y = 0) = 0$ mentre $P(X = 2)P(Y = 0) > 0$ (se invece fossero indipendenti, per ogni $x \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ e per ogni $y \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ si dovrebbe avere $P(X = x, Y = y) = P(X = x)\,P(Y = y)$.

e) Determinare la distribuzione di probabilità della variabile aleatoria $Z = X + Y$***.***

Soluzione:

z	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	$\frac{7}{2}$	4	$\frac{9}{2}$	5
$P(Z = z)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	0

Infatti, a priori, la variabile aleatoria Z, essendo somma di due variabili aleatorie a valori in $1, 2, 3, 4$ e $0, \frac{1}{2}, 1$, può assumere i valori 1, $\frac{3}{2}$, 2, $\frac{5}{2}$, 3, $\frac{7}{2}$, 4, $\frac{9}{2}$, 5. Alcuni di questi valori hanno tuttavia probabilità nulla di essere assunti, infatti vale

$$P(Z = 1) = P(X = 1, Y = 0) = c = 0.1, \quad P(Z = \tfrac{3}{2}) = P(X = 1, Y = \tfrac{1}{2}) = 2\,c = 0.2,$$

$$P(Z = 2) = P(X = 1, Y = 1) + P(X = 2, Y = 0) = 3\,c + 0 = 0.3$$

$$P(Z = \tfrac{5}{2}) = P(X = 2, Y = \tfrac{3}{2}) = c = 0.1,$$

$$P(Z = 3) = P(X = 2, Y = 1) + P(X = 3, Y = 0) = 0 + c = 0.1,$$

$$P(Z = \tfrac{7}{2}) = P(X = 3, Y = \tfrac{1}{2}) = 0$$

$$P(Z = 4) = P(X = 4, Y = 0) + P(X = 3, Y = 1) = 0 + c = 0.1,$$

$$P(Z = \tfrac{9}{2}) = P(X = 2, Y = 1) + P(X = 3, Y = 0) = 0 + c = 0.1$$

ed infine

$$P(Z = 5) = P(X = 4, Y = 1) = 0$$

f)(facoltativo) Calcolare il valore atteso della variabile aleatoria $Z = X + Y$***.***

Soluzione: Il valore atteso di Z vale 2.4

Infatti

$$\begin{aligned} E(Z) &= (1+0)\,c + (1+\tfrac{1}{2})\,2\,c + (1+1)\,3\,c + (2+\tfrac{1}{2})\,c + (3+0)\,c + (3+1)\,c + (4+\tfrac{1}{2})\,c \\ &= \big(1 + 3 + 6 + 2.5 + 3 + 4 + 4.5\big)\,c = 24\,c = 2.4 \end{aligned}$$

Esercizio 3. ***X è una variabile aleatoria tale che, per un'opportuna costante $K > 0$, ammette una densità della forma***

$$f(x) = \begin{cases} K \cdot 3\,x^2 & \text{per} \quad 0 \le x \le 2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

a) Determinare il valore di K **Soluzione:** La costante K vale $\frac{1}{8}$.

Infatti, la condizione

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$

diviene

$$\int_0^2 K\,3\,x^2\,dx = K\,\big[x^3\big]_0^2 = K\,8 = 1 \quad \Leftrightarrow K = \tfrac{1}{8}.$$

b) ***Determinare la funzione di distribuzione di X, e disegnarne il grafico.***

Soluzione:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{per} \quad x < 0 \\ \frac{x^3}{8} & \text{per} \quad 0 \le x < 2 \\ 1 & \text{per} \quad x \ge 1 \end{cases}$$

c) (facoltativo) Calcolare la varianza di X.

Soluzione: $Var(X) = \frac{3}{20}$. Infatti

$$E(X) = \int_0^2 x \, \tfrac{1}{8} \, 3x^2 \, dx = \tfrac{3}{8} \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^2 = \tfrac{3}{8} \, \tfrac{2^4}{4} = \tfrac{3}{2}$$

$$E(X^2) = \int_0^2 x^2 \, \tfrac{1}{8} \, 3x^2 \, dx = \tfrac{3}{8} \left[\frac{x^5}{5} \right]_0^2 = \tfrac{3}{8} \, \tfrac{2^5}{5} = \tfrac{12}{5}$$

da cui

$$Var(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2 = \tfrac{12}{5} - \big(\tfrac{3}{2}\big)^2 = \tfrac{12}{5} - \tfrac{9}{4} = \tfrac{48-45}{20} = \tfrac{3}{20}$$

Esercizio 4. ***Una moneta equilibrata viene lanciata n volte. Per ogni $k \le n$ poniamo $X_k = 1$ se il k-esimo lancio ha dato testa e $X_k = 0$ se ha dato croce. Indichiamo con $\bar{X}_n = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)$ la proporzione di teste negli n lanci.***

a) Usando la disuguaglianza di Chebyshev, trovare una minorazione per

$$\mathrm{P}(|\bar{X}_n - \tfrac{1}{2}| \le 0.1), \qquad \text{per } n = 900;$$

Soluzione: $\mathrm{P}(|\bar{X}_{900} - \frac{1}{2}| \le 0.1) \ge \frac{35}{36}$.

Infatti

$$\mathrm{P}(|\bar{X}_n - \tfrac{1}{2}| \le 0.1) = 1 - \mathrm{P}(|\bar{X}_n - \tfrac{1}{2}| > 0.1)$$

e, tenendo conto che $E(\bar{X}_n) = \frac{1}{2}$ e $Var(\bar{X}_n) = \frac{1}{n}\,\frac{1}{4}$, per la disuguaglianza di Chebyshev,

$$\mathrm{P}(|\bar{X}_n - \tfrac{1}{2}| > 0.1) \le \tfrac{1}{n}\,\tfrac{1}{4} \left(\frac{1}{\frac{1}{10}} \right)^2 = \tfrac{10^2}{4 \cdot 900} = \tfrac{1}{36} \qquad \text{per } n = 900$$

b) Usando l'approssimazione normale, calcolare approssimativamente

$$\mathrm{P}(\bar{X}_{900} \ge 0.51), \qquad \textit{per}\, n = 900;$$

Soluzione: $\mathrm{P}(\bar{X}_n \ge 0.51) \simeq 0.2743$.

Infatti

$$\mathrm{P}(\bar{X}_n \ge 0.51) = 1 - \mathrm{P}(\bar{X}_n < 0.51) \simeq 1 - \mathrm{P}\Big(\frac{\bar{X}_n - E(\bar{X}_n)}{\sqrt{Var(\bar{X}_n)}} < \frac{0.51 - E(\bar{X}_n)}{\sqrt{Var(\bar{X}_n)}} \Big)$$

per cui, essendo $E(\bar{X}_n) = \frac{n\,\frac{1}{2}}{n} = 0.5$ e $Var(\bar{X}_n) = \frac{1}{n^2}\,n\,\frac{1}{4}$ si ha

$$= 1 - \mathrm{P}\Big(\frac{\bar{X}_n - 0.5}{\sqrt{\frac{1}{4\,n}}} < \frac{0.51 - 0.5}{\sqrt{\frac{1}{4\,n}}}\Big)$$

da cui, per $n = 900$

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\bar{X}_n \geq 0.51) &\simeq 1 - \Phi\big(\tfrac{\sqrt{4\cdot 900}}{100}\big) = 1 - \Phi\big(\tfrac{60}{100}\big)\\ &= 1 - \Phi(0.6) \simeq 1 - 0.7257 = 0.2743\end{aligned}$$

c) (facoltativo) Usando l'approssimazione normale, calcolare approssimativamente

$$\mathrm{P}(|\bar{X}_n - \tfrac{1}{2}| \leq 0.01), \qquad \textit{per} \qquad n = 900;$$

Soluzione: $\mathrm{P}(|\bar{X}_{900} - \frac{1}{2}| \leq 0.01) \simeq 0.4514$

Infatti

$$\mathrm{P}(|\bar{X}_n - \tfrac{1}{2}| \leq 0.01) = \mathrm{P}\Big(- \frac{0.51 - E(\bar{X}_n)}{\sqrt{Var(\bar{X}_n)}} \leq \frac{\bar{X}_n - E(\bar{X}_n)}{\sqrt{Var(\bar{X}_n)}} \leq \frac{0.51 - E(\bar{X}_n)}{\sqrt{Var(\bar{X}_n)}}\Big)$$

da cui, per $n = 900$

$$\mathrm{P}(|\bar{X}_{900} - \tfrac{1}{2}| \leq 0.01) \simeq \Phi(0,6) - \Phi(-0.6) = 2\,\Phi(0.6) - 1 = 2 \cdot 0.7257 - 1 = 0.4514$$

d) (facoltativo) stimare quanto deve essere grande n perché sia

$$\mathrm{P}(|\bar{X}_n - \tfrac{1}{2}| \leq 0.01) \geq 0.95.$$

Soluzione:

I MODO Con la disuguaglianza di Chebyshev: Basta prendere $n \geq 50{\cdot}000$ (tuttavia questo valore di n è eccessivamente grande, si veda il secondo modo)

Infatti per la disuguaglianza di Chebyshev

$$\mathrm{P}(|\bar{X}_n - \tfrac{1}{2}| \leq 0.01) \geq 1 - \frac{Var(\bar{X}_n)}{\big(\frac{1}{100}\big)^2} = 1 - \tfrac{100^2}{4\,n}$$

e quindi affinché risulti $\mathrm{P}(|\bar{X}_n - \frac{1}{2}| \leq 0.01) \geq 0.95$, è sufficiente che

$$1 - \tfrac{100^2}{4\,n} \geq 0.95 \qquad \Leftrightarrow \qquad 0.5 \geq \tfrac{100^2}{4\,n} \qquad \Leftrightarrow \qquad n \geq \tfrac{100^3}{20} = 50{\cdot}000$$

II MODO Con l'approssimazione normale: Basta prendere $n \geq 9604$.

Infatti come abbiamo visto al punto precedente

$$\mathrm{P}(|\bar{X}_n - \tfrac{1}{2}| \leq 0.01) = \mathrm{P}\Big(- \frac{0.51 - E(\bar{X}_n)}{\sqrt{Var(\bar{X}_n)}} \leq \frac{\bar{X}_n - E(\bar{X}_n)}{\sqrt{Var(\bar{X}_n)}} \leq \frac{0.51 - E(\bar{X}_n)}{\sqrt{Var(\bar{X}_n)}}\Big)$$

da cui tenendo conto che $\frac{0.51-E(\bar{X}_n)}{\sqrt{Var(\bar{X}_n)}} = \frac{\sqrt{4\,n}}{100}$,

$$\mathrm{P}(|\bar{X}_n - \tfrac{1}{2}| \leq 0.01) \simeq \Phi(\tfrac{\sqrt{4\,n}}{100}) - \Phi(-\tfrac{\sqrt{4\,n}}{100}) = 2\,\Phi(\tfrac{\sqrt{4\,n}}{100}) - 1$$

basta trovare n tale che

$$2\,\Phi(\tfrac{\sqrt{4\,n}}{100}) - 1 \geq 0.95,$$

ossia tale che

$$\Phi(\tfrac{\sqrt{4\,n}}{100}) \geq \tfrac{1.95}{2} = 0,975.$$

Poiché la funzione Φ è crescente e $\Phi(1.96) = 0,975$, ciò equivale a richiedere che

$$\tfrac{\sqrt{4\,n}}{100} = \tfrac{\sqrt{n}}{50} \geq 1,96 \qquad \Leftrightarrow \qquad n \geq (50 \cdot 1.96)^2 = 98^2 = (100-2)^2 = 10000 - 400 + 4 = 9604$$