Corso di Laurea Triennale in Matematica
Calcolo delle Probabilita' I (docenti G. Nappo, F. Spizzichino)

Prima prova in itinere, Mercoledì 20 Aprile 2005 (tempo a disposizione: 3 ore).
Scrivere su ogni foglio NOME e COGNOME. Le risposte devono essere giustificate sui fogli protocollo e riportate nel foglio RISPOSTE.

Esercizio 1. Un test clinico dà risultato "positivo" con probabilità 0.9 **se** è effettuato su una persona che ha contratto un certo tipo di infezione; il test dà invece risultato "positivo" con probabilità 0.15 **se** è effettuato su una persona "sana" (cioè che non ha contratto quel tipo di infezione).
I PARTE Tizio si sottopone al test (una sola volta). Non è noto se Tizio sia sano o infetto e queste due diverse ipotesi alternative hanno rispettivamente probabilità del 60% e del 40%.
I.a) Calcolare la probabilità dell'evento

$$\boldsymbol{B = \{\textit{Tizio ottiene risultato "positivo"}\}}.$$

I.b) Quanto vale la probabilità condizionata dell'ipotesi che Tizio sia sano **dato che** è stato osservato il risultato B?
II PARTE Se una stessa persona ripete il test più volte (rimanendo ovviamente invariato il suo stato di salute, cioè rimanendo sempre infetto o sempre sano), allora i risultati ottenuti sono stocasticamente indipendenti fra di loro e con probabilità date come sopra, **a seconda che** sia infetta o sana. Caio si sottopone al test **4 volte consecutive**.
II.a) Calcolare la probabilità dell'evento

$$\boldsymbol{E = \{\textit{Caio ottiene due volte risultato "positivo" e due volte risultato "negativo"}\}}$$

nelle tre seguenti diverse situazioni:
a1) Caio è sano
a2) Caio è infetto
a3) Non è certo se Caio sia sano o infetto e queste due diverse ipotesi alternative hanno rispettivamente probabilità del 60% e del 40%.
II.b) Nella situazione **a3)**, quanto vale la probabilità condizionata dell'ipotesi che Caio sia sano **dato che** è stato osservato il risultato E?

Esercizio 2. Ogni Ferragosto, al paese di Fabio e Gianna si organizza una lotteria. La lotteria prevede $r = 3$ biglietti vincenti su $n = 10$ venduti[1], ciascuno con vincita $c = 1$. Fabio e Gianna comprano rispettivamente $\ell = 2$ ed $m = 2$ biglietti di questa lotteria. Siano X ed Y le variabili aleatorie che descrivono rispettivamente la vincita di Fabio e quella di Gianna, per il prossimo Ferragosto.
a1) Calcolare (svolgendo esplicitamente i calcoli) la distribuzione di probabilità di X.
a2) Che potete dire sulla distribuzione di Y?

[1]Si ricordi che in una lotteria ci sono n biglietti numerati da 1 ad n, e vengono estratti r numeri tra 1 ed n. I biglietti corrispondenti ai numeri estratti ricevono il premio.

a3) Come cambierebbero le distribuzioni di probabilità di X e di Y se invece fosse $c = 2$?
b1) Sia $\boldsymbol{A} = \{$***Fabio vince qualcosa***$\}$. Esprimere l'evento A in termini della variabile aleatoria X e calcolarne la probabilità.
b2) Sia $\boldsymbol{B} = \{$***sia Fabio che Gianna non vincono nulla***$\}$.
Calcolare la probabilità di B ed esprimere tale evento in termini di X e Y.
c) Siano, per i, $j = 1, 2, 3$,
$\boldsymbol{F_i} = \{$***l'i-esimo numero estratto corrisponde ad un biglietto di Fabio***$\}$
$\boldsymbol{G_j} = \{$***il j-esimo numero estratto corrisponde ad un biglietto di Gianna***$\}$.

c1) Calcolare la probabilità dell'evento $\boldsymbol{F_1} \cap \boldsymbol{F_2} \cap \overline{\boldsymbol{G_3}}$.

c2) Esprimere l'evento $\boldsymbol{\{X = 2, Y = 0\}}$ in termini degli eventi F_i ed G_j (e/o dei loro complementari), e calcolarne la probabilità (siamo sempre nel caso $c = 1$).

c3) Le variabili aleatorie X ed Y sono indipendenti?

c4) **(Facoltativo)** Calcolare la distribuzione di probabilità congiunta di X ed Y.

d) Calcolare la distribuzione condizionata di Y dato $\{X = 2\}$.
e) Individuare la distribuzione di probabilità di Z, la variabile aleatoria che rappresenta la vincita complessiva dei due giocatori.
f) **(Facoltativo)** Calcolare il valore atteso di X, di Y e di Z.
g) **(Facoltativo)** Sempre con $c = 1$, svolgere l'esercizio con n, r, ℓ ed m generici.

Esercizio 3. X ed Y sono due variabili aleatorie la cui distribuzione di probabilità congiunta è indicata nella seguente tabella (per X l'insieme dei valori possibili è costituito da $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$, mentre per Y l'insieme dei valori possibili è costituito da $\{-1, 0, 1\}$):

$Y \backslash X$	-2	-1	0	1	2
-1	0.1	0.1	0.2	0	0
0	0	0.2	θ	θ	0
1	0	0	θ	0.2	θ

a) Calcolare il valore della costante θ.

b) Calcolare la distribuzione marginale di Y.

c) Calcolare la distribuzione condizionata di X, dato $\{Y = 0\}$.

d) $\{X = 0\}$ ed $\{Y = 0\}$ sono stocasticamente indipendenti, correlati positivamente o correlati negativamente?

e) X ed Y sono stocasticamente indipendenti?

f) Calcolare la distribuzione di probabilità della variabile aleatoria $Z = X + Y$.

g) **(facoltativo)** Calcolare il valore atteso della variabile aleatoria Z.

FOGLIO RISPOSTE della prima prova in itinere, Mercoledi 21 Aprile 2004

NOME e COGNOME ....

canale NAPPO ☐ **canale SPIZZICHINO** ☐

Esercizio 1. –

I.a) $P(B)$ =............................

I.b) La probabilità che Tizio sia sano dato che è stato osservato il risultato B vale ....

II.a1) (se sano) p_1 =.............. **II.a2)** (se infetto) p_2 =.............. **II.a3)** p = ...

I.b) La probabilità che Caio sia sano dato E vale ....

Esercizio 2. –

a1)

k			
$P(X = k)$			

a2) $P(Y = k)$ = ...

a3)

(c=2) h			
$P_2(X = h)$			

b1) $P(A) = P(X$ ......$)$ = ... **b2)** $P(B) = P(X$ ......$, Y$ ......$)$ = ...

c1) $P(F_1 \cap F_2 \cap \overline{G_3})$ =.......................

c2) $\{X = 2,\ Y = 0\}$ =............ .... $P(X = 2,\ Y = 0)$ =.......................

c3) X ed Y sono stocasticamente indipendenti SI ☐ NO ☐

c4) **(facoltativo)** svolto SI ☐ NO ☐

d) la distribuzione condizionata di Y, dato $\{X = 2\}$ è individuata da

y	0	1	2
$P(Y = y \mid X = 2)$			

e) la distribuzione di probabilità di Z è del tipo .... ovvero

$P(Z = k)$ = ... per k = ...

f) **(facoltativo)** (valori attesi di X, Y e Z) svolto SI ☐ NO ☐

g) **(facoltativo)** (n, r, ℓ, m generici) svolto SI ☐ NO ☐

Esercizio 3. –

a) il valore della costante θ è ....

b) la distribuzione marginale di Y è individuata da

y	-1	0	1
$P(Y = y)$			

c) la distribuzione condizionata di X, dato $\{Y = 0\}$ è individuata da

x	-2	-1	0	1	2
$P(X = x \mid Y = 0)$					

d) $\{X = 0\}$ ed $\{Y = 0\}$ sono

stocasticamente indipendenti ☐ correlati positivamente ☐ correlati negativamente ☐

e) X ed Y sono stocasticamente indipendenti SI ☐ NO ☐

f) la distribuzione di probabilità di $Z = X + Y$ è individuata da

z							
$P(Z = z)$							

g) **(facoltativo)** il valore atteso della variabile aleatoria Z vale ....