

Laurea Triennale in Matematica
Corso di Calcolo delle Probabilità I

A.A. 2004/2005 (Docenti: G. Nappo, F. Spizzichino)

Prova scritta 22 Settembre 2005

1) Fra gli studenti che preparano l'esame di xxx, alcuni hanno studiato, oltre al testo di base, anche il testo consigliato yyy, mentre altri hanno tralasciato tale studio; tali due gruppi (diciamo gruppo A e gruppo B) rappresentano rispettivamente l'ottanta per cento ed il venti per cento del totale degli studenti.

Gli studenti del gruppo A hanno una probabilità uguale a 0.75 di superare l'esame con votazione superiore al 24, una probabilità uguale a 0.20 di superare l'esame con votazione compresa fra 18 e 24 ed una rimanente probabilità 0.05 di non superare l'esame; le analoghe probabilità per gli studenti del gruppo B sono invece uguali a 0.10, 0.70, 0.20.

a) Calcolare, per uno studente estratto a caso dalla popolazione, le probabilità di superare l'esame con votazione superiore al 24, di superare l'esame con votazione compresa fra 18 e 24, di non superare l'esame, rispettivamente.

b) Supponiamo che, di uno studente preso a caso, si sappia che ha superato l'esame con votazione superiore al 24; data questa informazione, quanto deve essere valutata la probabilità che egli abbia studiato il testo yyy?

2) Per essere ammessi a frequentare un corso di studio post-lauream, occorre

a) aver già conseguito almeno un diploma di laurea triennale

b) superare una prova scritta di lingua inglese

c) superare una prova generale di cultura scientifica

Enrica desidera iscriversi, ma non si è ancora laureata; spera però di laurearsi entro la data di scadenza della domanda di ammissione.

Poniamo

$A \equiv \{\text{Enrica riesce a laurearsi entro la data di scadenza}\}$, $B \equiv \{\text{Enrica supera la prova di lingua}\}$, $C \equiv \{\text{Enrica supera la prova di cultura}\}$.

Assumiamo che gli eventi A, B e C siano stocasticamente indipendenti e che risulti

$$P(A) = 0.8, P(B) = 0.7, P(C) = 0.6.$$

/bigskip

- a) Qual e' la probabilita' che Enrica fallisca almeno una delle tre condizioni?
- b) Sapendo che Enrica ha fallito esattamente una delle tre condizioni, qual e' la probabilita' che abbia fallito la prova generale di cultura ?
- c) Si indichi con X il numero di prove superate da Enrica, fra A, B, C.
Qual è la distribuzione di probabilità di X ; ed il valore atteso di X ?
- 3) X e' una variabile aleatoria con funzione di densita' di probabilita' data da

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x < -2 \\ k \cdot |x| & \text{per } -2 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{per } x > 2 \end{cases}$$

- a) Calcolare il valore di k
- b) Calcolare $P(0 \leq X \leq 1)$
- c) Verificare che $\mathbb{E}(X) = 0$ e $Var(X) = 2$
- d) Consideriamo ora 80 variabili aleatorie X_1, \dots, X_n indipendenti, identicamente distribuite e con la stessa distribuzione di X e consideriamo la variabile aleatoria $S_{80} = \sum_{k=1}^{80} X_k$.

In temini della disuguaglianza di Chebichev, trovare una maggiorazione per la probabilità

$$P\{-1/2 \leq S_{80}/80 \leq 1/2\}.$$