CORSO DI CALCOLO DELLE PROBABILITÀ (1^o modulo)
- PROVA d'esame del 6/06/2003
- Laurea Quadriennale in Matematica - (Prof. Nappo)

Scrivere su ogni foglio NOME e COGNOME. Le risposte devono essere giustificate sui fogli protocollo e riportate nel foglio RISPOSTE.

ESERCIZIO 1 Antonio e Benedetto giocano a scacchi per un totale di 10 partite. La probabilità di patta (=pareggio), in ogni partita, è 1/3; inoltre, i due giocatori sono di eguale bravura, e quindi le rispettive probabilità di vittoria sono identiche. Denotiamo con X_1 il numero (aleatorio) di vittorie di Antonio, con X_2 il numero di vittorie di Benedetto ed infine con X_3 il numero di patte. [Si supponga che gli esiti delle partite siano indipendenti]
a) Scrivere in termini delle variabili aleatorie (X_1, X_2, X_3) l'evento A che, sulle 10 partite giocate, Antonio vinca (esattamente) 4 partite e che Benedetto ne vinca (esattamente) 3, e scrivere l'espressione della probabilità di A.
b) Individuare la distribuzione di X_1, e calcolare la probabilità che Benedetto vinca (esattamente) 3 partite, **sapendo che** Antonio ne ha vinte (esattamente) 4.
c1) Individuare la distribuzione di $Y = X_2 + X_3$ e la distribuzione congiunta di (X_1, Y).
c2) Calcolare $Cov(X_1, Y)$. (Si suggerisce di riscrivere Y in funzione di X_1)
d1) Calcolare la distribuzione condizionata di X_2, data $X_1 = h$, per $h = 0, \dots, 10$,
d2) Scrivere $\mathbb{E}[X_2|X_1 = h]$, per $h = 0, \dots, 10$, e scrivere $\mathbb{E}[X_2|X_1]$.
d3) (**facoltativo**) Verificare che $\mathbb{E}\left[\mathbb{E}[X_2|X_1]\right] = \mathbb{E}[X_2]$.

ESERCIZIO 2 $X_1, X_2, ..., X_{100}$ sono variabili aleatorie indipendenti, ciascuna con la seguente distribuzione di probabilità

$$P\{X_j = 0\} = 0.45 - p\,,\; P\{X_j = 1\} = 0.25,\; P\{X_j = 0.5\} = 0.30,\; P\{X_j = 2\} = p\,,$$

dove $0 < p < 0.45$ è un parametro.
a1) Trovare il valore di p per cui risulti $E(X_j) = 1$.
a2) In corrispondenza al valore di p trovato nel precedente punto, calcolare la varianza di X_j.
b) Ancora in corrispondenza allo stesso valore di p, posto

$$Y = \frac{\sum_{j=1}^{100} X_j}{100},$$

trovare la minorazione per la probabilità $P\{|Y - 1| \leq \frac{1}{5}\sqrt{\frac{21}{40}}\}$, che si ottiene utilizzando la disuguaglianza di Chebichev.
c) Utilizzando il teorema centrale del limite, trovare un'approssimazione per $P\{|Y-1| \leq \frac{1}{5}\sqrt{\frac{21}{40}}\}$.

ESERCIZIO 3 Siano X ed Y due variabili aleatorie indipendenti, ciascuna con legge gaussiana standard $N(0,1)$
a) Mostrare che $S = X^2$ e $T = Y^2$ hanno legge gamma $\Gamma(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ e scrivere la densità congiunta di (S, T).
b1) Determinare la legge di $S + T = X^2 + Y^2$. (Si suggerisce di utilizzare le funzioni caratteristiche)
b2) Calcolare la densità congiunta di $(U, V) = \big(2S, 2(S + T)\big)$.
Utilizzando le risposte precedenti, risolvere il seguente quesito:
c) Si consideri, in un piano cartesiano, un punto P di coordinate aleatorie indipendenti, ciascuna con legge gaussiana standard. Determinare la legge del quadrato della distanza dall'origine del punto P.

CORSO DI CALCOLO DELLE PROBABILITÀ (1^o modulo)
- **FOGLIO RISPOSTE - PROVA d'esame** del 6/06/2003
- Laurea Quadriennale in Matematica - (Prof. Nappo)
NOME....................................... COGNOME..

ESERCIZIO 1
a) A=...
$P(A)$ =..
b)La distribuzione di X_1 è
....
....
la probabilità cercata vale ....
c1) $Y = X_2 + X_3$ segue una distribuzione
....
La distribuzione congiunta di (X_1, Y) vale
....
....
....
....
c2) $Cov(X_1, Y)$ =...

d1) La distribuzione condizionata di X_2, data $X_1 = h$, per $h = 0, \ldots, 10$ vale
....
....

d2) $\mathbb{E}[X_2|X_1 = h]$ = ...
$\mathbb{E}[X_2|X_1]$ =...
d3) (**facoltativo**) Verifica effettuata ☐ non effettuata ☐

ESERCIZIO 2
a1) $p =$ ....
a2) varianza di X_j = ...
b) $P\{|Y - 1| \leq \frac{1}{5}\sqrt{\frac{21}{40}}\} \geq$ ....
c) $P\{|Y - 1| \leq \frac{1}{5}\sqrt{\frac{21}{40}}\} \cong$........................

ESERCIZIO 3
a) Verifica effettuata ☐ non effettuata ☐
densità congiunta di (S, T)
....
....

b1) $S + T = X^2 + Y^2$ ha legge ....
b2) La densità congiunta di $(U, V) = \big(2S, 2(S + T)\big)$ vale
....
....

c) Il quadrato della distanza dall'origine del punto P ha legge ....

CORSO DI CALCOLO DELLE PROBABILITÀ (1^o modulo)
- **SOLUZIONI - PROVA d'esame** del 6/06/2003
- Laurea Quadriennale in Matematica - (Prof. Nappo)

ESERCIZIO 1 Antonio e Benedetto giocano a scacchi per un totale di 10 partite. La probabilità di patta (=pareggio), in ogni partita, è 1/3; inoltre, i due giocatori sono di eguale bravura, e quindi le rispettive probabilità di vittoria sono identiche. Denotiamo con X_1 il numero (aleatorio) di vittorie di Antonio, con X_2 il numero di vittorie di Benedetto ed infine con X_3 il numero di patte. [Si supponga che gli esiti delle partite siano indipendenti]

a) Scrivere in termini delle variabili aleatorie (X_1, X_2, X_3) l'evento A che, sulle 10 partite giocate, Antonio vinca (esattamente) 4 partite e che Benedetto ne vinca (esattamente) 3, e scrivere l'espressione della probabilità di A.
RISPOSTA a) L'evento A si può scrivere in due modi:

$$A = \{X_1 = 4, X_2 = 3\} = \{X_1 = 4, X_2 = 3, X_3 = 3\}.$$

Poiché si tratta di 10 prove indipendenti a tre esiti con $p_1 = p_2 = p_3 = 1/3$ si ha

$$P(A) = P(\{X_1 = 4, X_2 = 3, X_3 = 3\}) = \frac{10!}{4!\,3!\,3!}\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{10!}{4!\,3!\,3!}\left(\frac{1}{3}\right)^{10}$$

Si può anche usare il fatto che la legge congiunta di $(X_1 = 4, X_2 = 3, X_3 = 3)$ è multinomiale[1].

b) Individuare la distribuzione di X_1, e calcolare la probabilità che Benedetto vinca (esattamente) 3 partite, **sapendo che** Antonio ne ha vinte (esattamente) 4.
RISPOSTA b) La distribuzione di X_1 è B(10,1/3), binomiale di parametri $n = 10$ e $p = 1/3$, infatti si tratta del numero di successi in 10 prove indipendenti, in cui successo significa vittoria di Antonio, ed insuccesso significa partita patta o vittoria di Benedetto, ovvero

$$P(X_1 = h) = \binom{10}{h}\left(\frac{1}{3}\right)^h\left(\frac{2}{3}\right)^{10-h}, \text{ per } h = 0, 1, \ldots, 10$$

La probabilità cercata è

$$P(X_2 = 3|X_1 = 4) = \frac{P(X_2 = 3, X_1 = 4)}{P(X_1 = 4)} = \frac{P(X_1 = 4, X_2 = 3, X_3 = 3)}{P(X_1 = 4)}$$
$$= \frac{\frac{10!}{4!\,3!\,3!}\left(\frac{1}{3}\right)^{10}}{\frac{10!}{4!\,6!}\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^6} = \frac{6!}{3!\,3!}\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{3\cdot2\cdot1\cdot3\cdot2\cdot1}\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{5}{16}$$

[1] Ricordiamo la legge multinomiale: Date n variabili aleatorie Y_h, per $h = 1, \cdots, n$, indipendenti identicamente distribuite, ciascuna delle quali può assumere r valori (chiamiamoli $1, \ldots, r$) con probabilità $p_1, 2, \ldots, p_r$ rispettivamente. (I valori $1, \ldots, r$ corrispondono ai possibili esiti per ciascuna prova, l'indipendenza delle variabili aleatorie corrisponde all'indipendenza delle n prove, mentre l'identica distribuzione corrisponde al fatto che le prove sono ripetute) La probabilità che il valore 1 sia assunto k_1 volte, ..., il valore r sia assunto k_r volte, è data da

$$\frac{n!}{k_1!\cdots k_r!}p_1^{k_1}\cdots p_r^{k_r}, \qquad \text{se } k_1 \geq 0, \ldots, k_r \geq 0, \text{ e } k_1 + \cdots + k_r = n,$$

e vale 0 altrimenti.
In altre parole, se X_s rappresenta il numero delle volte che viene assunto il valore s,(o equivalentemente il numero delle prove in cui si ha l'esito di tipo s, tra le n prove effettuate), per $s = 1, 2, \ldots, r$, allora

$$P(X_1 = k_1, \cdots, X_r = k_r) = \begin{cases} \frac{n!}{k_1!\cdots k_r!}p_1^{k_1}\cdots p_r^{k_r}, & \text{se } k_1 \geq 0, \ldots, k_r \geq 0, \text{ e } k_1 + \cdots + k_r = n, \\ 0 & \textit{altrimenti.} \end{cases}$$

c1) Individuare la distribuzione di $Y = X_2 + X_3$ e la distribuzione congiunta di (X_1, Y).
RISPOSTA c1) Anche Y segue una legge binomiale, con $n = 10$, ma con $p = 2/3$, infatti Y conta il numero degli insuccessi di cui al punto **b)**, ovvero essendo $Y = 10 - X_1$ si ha

$$\begin{aligned} P(Y = k) &= P(10 - X_1 = k) = P(X_1 = 10 - k) \\ &= \binom{10}{10-k} \left(\frac{1}{3}\right)^{10-k} \left(\frac{2}{3}\right)^k = \binom{10}{k} \left(\frac{2}{3}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^{10-k}, \end{aligned}$$

per $0 \leq 10 - k \leq 10$, ovvero per $0 \leq k \leq 10$.

c2) Calcolare $Cov(X_1, Y)$. (Si suggerisce di riscrivere Y in funzione di X_1)
RISPOSTA c2)

$$\begin{aligned} Cov(X_1, Y) &= Cov(X_1, 10 - X_1) = Cov(X_1, 10) - Cov(X_1, X_1) = 0 - Var(X_1) \\ &= -np(1-p) = -10\,\frac{1}{3}\,\frac{2}{3} = -\frac{20}{9}. \end{aligned}$$

d1) Calcolare la distribuzione condizionata di X_2, data $X_1 = h$, per $h = 0, \ldots, 10$,
RISPOSTA d1) Si ha che, per $k \geq =$ e $0 \leq h + k \leq 10$, ovvero per $0 \leq k \leq 10 - h$,

$$\begin{aligned} P(X_2 = k | X_1 = h) &= \frac{P(X_2 = k, X_1 = h)}{P(X_1 = h)} = \frac{P(X_1 = h, X_2 = k, X_3 = 10 - k - h)}{P(X_1 = h)} \\ &= \frac{\frac{10!}{h!\,k!\,(10-h-k)!} \left(\frac{1}{3}\right)^{10}}{\frac{10!}{h!\,(10-h)!} \left(\frac{1}{3}\right)^h \left(\frac{2}{3}\right)^{10-h}} = \frac{(10-h)!}{k!\,(10-h-k)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{10-h} \end{aligned}$$

e cioè la distribuzione condizionata di X_2 dato $X_1 = h$ è binomiale di parametro $n = 10 - h$ e $p = 1/2$

d2) Scrivere $\mathbb{E}[X_2 | X_1 = h]$, per $h = 0, \ldots, 10$, e scrivere $\mathbb{E}[X_2 | X_1]$.
RISPOSTA d2) Poiché $\mathcal{L}(X_2 | X_1 = h) = Bin(10 - h, 1/2)$ si ha $\mathbb{E}[X_2 | X_1 = h] = (10 - h)\frac{1}{2}$ e $\mathbb{E}[X_2 | X_1] = (10 - X_1)/2$

d3) (**facoltativo**) Verificare che $\mathbb{E}\left[\mathbb{E}[X_2 | X_1]\right] = \mathbb{E}[X_2]$.
RISPOSTA d3) Dal punto precedente si ottiene che

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{E}[X_2 | X_1]\right] = \mathbb{E}\left[(10 - X_1)/2\right] = \left(10 - \mathbb{E}\left[X_1\right]\right)/2 = (10 - 10/3)/2 = 10/3.$$

D'altra parte si ha ovviamente che anche X_2 è una variabile aleatoria $Bin(10, 1/3)$ (come X_1) e quindi

$$\mathbb{E}[X_2] = 10\frac{1}{3} = 10/3.$$

ESERCIZIO 2 $X_1, X_2, ..., X_{100}$ sono variabili aleatorie indipendenti, ciascuna con la seguente distribuzione di probabilità

$$P\{X_j = 0\} = 0.45 - p\,,\ P\{X_j = 1\} = 0.25,\ P\{X_j = 0.5\} = 0.30,\ P\{X_j = 2\} = p\,,$$

dove $0 < p < 0.45$ è un parametro.

a1) Trovare il valore di p per cui risulti $E(X_j) = 1$.
RISPOSTA a1) Si ha

$$\mathbb{E}[X] = 0 \cdot (0.45 - p) + 1 \cdot 0.25 + 0.5 \cdot 0.30 + 2 \cdot p = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{10} + 2p = \frac{5+3}{20} + 2p = 1$$

se e solo se $2p = 1 - \frac{8}{20}$, ovvero $p = \frac{6}{20} = \frac{3}{10} = 0.30$, che soddisfa la condizione $0 < p < 0.45$.

a2) In corrispondenza al valore di p trovato nel precedente punto, calcolare la varianza di X_j.
RISPOSTA a2) Si ha

$$Var(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}^2[X] = \mathbb{E}[X^2] - 1 = \frac{21}{40},$$

infatti

$$\mathbb{E}[X^2] = 0^2 \cdot (0.45 - p) + 1^2 \cdot 0.25 + (0.5)^2 \cdot 0.30 + 2^2 \cdot p = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{10} + 4 \cdot \frac{3}{10} = \frac{10 + 3 + 48}{40} = \frac{61}{40}.$$

b) Ancora in corrispondenza allo stesso valore di p, posto

$$Y = \frac{\sum_{j=1}^{100} X_j}{100},$$

trovare la minorazione per la probabilità $P\{|Y - 1| \leq \frac{1}{5}\sqrt{\frac{21}{40}}\}$, che si ottiene utilizzando la disuguaglianza di Chebishev.

RISPOSTA b) Innanzi tutto si osservi che, se si pone $\sigma = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{\frac{21}{40}}$, lo scarto quadratico medio di X, e $\alpha = \frac{1}{5}$, si sta chiedendo di trovare una minorazione a

$$P\{|Y - 1| \leq \alpha\sigma\} = 1 - P\{|Y - 1| > \alpha\sigma\}.$$

Tenendo presente che $Y = \frac{\sum_{j=1}^{n} X_j}{n}$, per $n = 100$, e quindi $\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[X] = 1$ e $Var(Y) = \frac{Var(X)}{n} = \frac{\sigma^2}{n}$ per la disuguaglianza di Chebishev si ha che

$$P\{|Y - \mathbb{E}[Y]| > \alpha\sigma\} \leq \frac{Var(Y)}{\alpha^2\sigma^2} = \frac{Var(X)}{n\alpha^2\sigma^2} = \frac{1}{n\alpha^2},$$

che insieme alla precedente uguaglianza fornisce la minorazione

$$P\{|Y - 1| \leq \alpha\sigma\} \geq 1 - \frac{1}{n\alpha^2}.$$

Nel nostro caso $n = 100$ ed $\alpha = 1/5$ quindi con la disuguaglianza di Chebishev si ottiene

$$P\{|Y - 1| \leq \frac{1}{5}\sqrt{\frac{21}{40}}\} \geq 1 - \frac{1}{100\frac{1}{25}} = \frac{3}{4}.$$

c) Utilizzando il teorema centrale del limite, trovare un'approssimazione per $P\{|Y-1| \leq \frac{1}{5}\sqrt{\frac{21}{40}}\}$.
RISPOSTA c) Tenendo presente che, come nel punto precedente, $Y = \frac{\sum_{j=1}^{n} X_j}{n}$, per $n = 100$, si osservi che l'evento

$$|Y - \mathbb{E}[X]| \leq \alpha\sigma \Leftrightarrow \left| \frac{\sum_{j=1}^{n}(X_j - \mathbb{E}[X])}{n} \right| \leq \alpha\sigma \Leftrightarrow \left| \frac{1}{\sigma} \frac{\sum_{j=1}^{n}(X_j - \mathbb{E}[X])}{\sqrt{n}} \right| \leq \frac{1}{\sigma}\alpha\sqrt{n}\sigma = \alpha\sqrt{n}$$

da cui

$$P(|Y-\mathbb{E}[X]|\le\alpha\sigma)=P(-\alpha\sqrt{n}\le\frac{1}{\sigma}\frac{\sum_{j=1}^n(X_j-\mathbb{E}[X])}{\sqrt{n}}\le\alpha\sqrt{n})$$
$$\cong\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\alpha\sqrt{n}}^{\alpha\sqrt{n}}\mathrm{e}^{-t^2/2}\,dt=\Phi(\alpha\sqrt{n})-\Phi(-\alpha\sqrt{n})=2\Phi(\alpha\sqrt{n})-1.$$

Nel nostro caso $n=100$ quindi si può approssimare $P(|Y-1|\le\frac{1}{5}\sqrt{\frac{21}{40}})$ con $2\Phi(2)-1=2\cdot 0.9772-1=0,9544$.

ESERCIZIO 3 Siano X ed Y due variabili aleatorie indipendenti, ciascuna con legge gaussiana standard $N(0,1)$

a) Mostrare che $S=X^2$ e $T=Y^2$ hanno legge gamma $\Gamma(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ e scrivere la densità congiunta di (S,T).

RISPOSTA a) Si ha che

$$F_S(s)=P(S\le s)=P(X^2\le s)=\begin{cases}P(-\sqrt{s}\le X\le\sqrt{s})=F_X(\sqrt{s})-F_X((-\sqrt{s})^-) & \text{se } s\ge 0,\\ 0 & \text{se } s<0.\end{cases}$$

Nel nostro caso si ha che, posto $\Phi(x)$ la funzione di distribuzione di una Gaussiana standard, si ha

$$F_S(s)=\begin{cases}\Phi(\sqrt{s})-\Phi(-\sqrt{s}) & \text{se } s\ge 0,\\ 0 & \text{se } s<0,\end{cases}$$

e quindi la densità vale

$$f_S(s)=\frac{d}{ds}F_S(s)=\begin{cases}\frac{d}{ds}\left[\Phi(\sqrt{s})-\Phi(-\sqrt{s})\right] & \text{se } s>0,\\ 0 & \text{se } s<0,\end{cases}$$

ovvero

$$f_S(s)=\begin{cases}\frac{d}{dx}\Phi(x)\Big|_{x=\sqrt{s}}\frac{d}{ds}\sqrt{s}-\frac{d}{dx}\Phi(x)\Big|_{x=-\sqrt{s}}\frac{d}{ds}(-\sqrt{s}) & \\ =\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-(\sqrt{s})^2/2}\frac{1}{2\sqrt{s}}-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-(\sqrt{s})^2/2}\left(-\frac{1}{2\sqrt{s}}\right) & \\ =\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-s/2}\frac{1}{\sqrt{s}} & \text{se } s>0,\\ 0 & \text{se } s<0.\end{cases}$$

Quindi, S ha distribuzione $\Gamma(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ in quanto

$$f_S(s)=\begin{cases}=c\,s^{\frac{1}{2}-1}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}s} & \text{se } s>0,\\ 0 & \text{se } s<0,\end{cases}$$

con $c=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}=\frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)}$. Inoltre, da questa relazione, poiché $\lambda=\frac{1}{2}$ si deduce che $\Gamma(\alpha)=\Gamma(\frac{1}{2})=\frac{1}{\sqrt{\pi}}$.

b1) Determinare la legge di $S+T=X^2+Y^2$. (Si suggerisce di utilizzare le funzioni caratteristiche)

RISPOSTA b1) La risposta si può dare in due modi, o utilizzando il risultato che la somma di due variabili aleatorie indipendenti e con distribuzione $\Gamma(\alpha_1,\lambda)$ e $\Gamma(\alpha_2,\lambda)$, rispettivamente (attenzione il parametro λ deve essere lo stesso) è una variabile aleatoria $\Gamma(\alpha_1+\alpha_2,\lambda)$. Questo risultato si può dimostrare anche direttamente utilizzando le funzioni caratteristiche. Infatti la funzione caratteristica $\varphi(t)$ di una variabile aleatoria $\Gamma(\alpha,\lambda)$ vale

$$\varphi(t)=\left(\frac{1}{\lambda-it}\right)^{\alpha}$$

da cui, per l'indipendenza di S e T si ha

$$\varphi_{S+T}(t) = \varphi_S(t)\varphi_T(t) = \left(\frac{1}{\lambda - it}\right)^{\alpha}\left(\frac{1}{\lambda - it}\right)^{\alpha} = \left(\frac{1}{\lambda - it}\right)^{2\alpha} = \left(\frac{1}{1/2 - it}\right)$$

che è la funzione caratteristica di una variabile aleatoria con legge $\Gamma(1, 1/2) = EXP(1/2)$.

b2) Calcolare la densità congiunta di $(U, V) = \big(2S, 2(S+T)\big)$.
RISPOSTA b2) Si consideri il sistema

$$\begin{cases} u &= 2s \\ v &= 2s + 2t \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} s(u,v) &= u/2 \\ t(u,v) &= (v-u)/2 \end{cases}$$

Allora

$$\begin{aligned} f_{U,V}(u,v) &= f_{S,T}\big(s(u,v), t(u,v)\big)\left| det \frac{\partial\big(s(u,v), t(u,v)\big)}{\partial(u,v)}\right| \\ &= f_{S,T}(u/2, (v-u)/2)\left| det \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}\right| = f_S(u/2) f_T((v-u)/2)\frac{1}{4} \\ &= \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\,(u/2)^{\alpha-1}\,\mathrm{e}^{-\lambda u/2}\mathbb{I}_{(0,\infty)}(u/2)\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\,((v-u)/2)^{\alpha-1}\,\mathrm{e}^{-\lambda(v-u)/2}\mathbb{I}_{(0,\infty)}((v-u)/2)\frac{1}{4} \\ &= \begin{cases} \frac{\lambda^{2\alpha}}{\Gamma^2(\alpha)}\big(u(v-u)\big)^{\alpha-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2\alpha}\mathrm{e}^{-\lambda v/2} & \text{se } 0 < u < v \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \end{aligned}$$

Nel nostro caso $\lambda = \alpha = 1/2$ e quindi (dato che $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$)

$$f_{U,V}(u,v) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\big(u(v-u)\big)^{-1/2}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-v/4} & \text{se } 0 < u < v \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Utilizzando le risposte precedenti, risolvere il seguente quesito:
c) Si consideri, in un piano cartesiano, un punto P di coordinate aleatorie indipendenti, ciascuna con legge gaussiana standard. Determinare la legge del quadrato della distanza dall'origine del punto P.
RISPOSTA c) Posto $P = (X, Y)$ il quadrato della distanza dall'origine vale $X^2 + Y^2$, che coincide con $S + T$. Quindi, per il risultato del punto **b1)**, la legge di $X^2 + Y^2$ è esponenziale di parametro $\lambda = 1/2$.