

CORSO DI CALCOLO DELLE PROBABILITÀ (1° modulo)

- PROVA d'esame del 19/02/2003

- Laurea Quadriennale in Matematica - (Prof. Nappo)

Scrivere su ogni foglio NOME e COGNOME. Le risposte devono essere giustificate sui fogli protocollo e riportate nel foglio RISPOSTE.

ESERCIZIO 1. (prima parte)

In un'urna, che inizialmente contiene una sola pallina di colore rosso, vengono inserite un numero aleatorio N di palline bianche.

Viene estratta una pallina dall'urna così formata.

Risolvere l'esercizio in una delle due seguenti situazioni

PRIMA SITUAZIONE:

Sia N una variabile aleatoria che assume solo i valori $\{1, 2, 3\}$ e con

$$P(N = 1) = P(N = 2) = P(N = 3).$$

SECONDA SITUAZIONE :

Sia N una variabile aleatoria con legge di Poisson di media μ

(**Attenzione:** in caso di difficoltà si assuma $\mu = 1$).

a1. Determinare la probabilità p che dall'urna venga estratta la pallina rossa.

(si ponga A l'evento *viene estratta una pallina rossa dall'urna*)

a2. Determinare il valore di $E(\frac{1}{1+N})$.

a3. Sapendo che è stata estratta una pallina rossa, calcolare la probabilità che $N = k$ e stabilire per quale valore di k si ottiene il valore massimo.

ESERCIZIO 1. (seconda parte)

Si ripeta daccapo il procedimento per n urne, utilizzando per ogni urna variabili aleatorie indipendenti N_1, N_2, \dots tutte distribuite come N (ovvero nell'urna i ci sono 1 pallina rossa ed N_i palline bianche, e si estrae una pallina da ciascuna urna).

b1. Calcolare la probabilità p_n che da tutte le urne venga estratta la pallina rossa.

(si ponga A_i l'evento *viene estratta una pallina rossa dall'urna i*)

b2. Calcolare

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n.$$

Sia Y_n la successione di variabili aleatorie

$$Y_n = \prod_{i=1}^n \frac{1}{1 + N_i}, \quad n = 1, 2, \dots$$

c1. Calcolare il valore atteso di Y_n

c2. Utilizzando la disuguaglianza di Markov, mostrare che Y_n converge a zero in probabilità, quando n tende all'infinito.

CORSO DI CALCOLO DELLE PROBABILITÀ (1° modulo)

- PROVA d'esame del 19/02/2003

- Laurea Quadiennale in Matematica - (Prof. Nappo)

Scrivere su ogni foglio NOME e COGNOME. Le risposte devono essere giustificate sui fogli protocollo e riportate nel foglio RISPOSTE.

ESERCIZIO 2.

Sia $0 < p < 1$ la probabilità che esca testa lanciando una moneta. Sia X_1 il numero delle croci prima dell'uscita della prima testa in una prima serie di lanci indipendenti. Sia X_2 il numero delle croci prima dell'uscita della prima testa in una serie di lanci indipendenti di una seconda moneta (identica alla prima). Infine, sia $U = \min(X_1, X_2)$ (**Attenzione:** in caso di difficoltà si assuma la moneta bilanciata)

- a1. Determinare la legge di U
- a2. Determinare il valore atteso $E(U)$.
- b1. Determinare la legge di X_1 condizionata a $U = k$.
- b2. Determinare se X_1 e U sono indipendenti.
- c1. Calcolare $E(X_1|U = k)$.
- c2. Verificare che $E(X_1) = E(E(X_1|U))$

ESERCIZIO 3.

Sia X una variabile aleatoria con densità di probabilità

$$\begin{cases} f_X(x) = C \frac{1}{x^4} & \text{per } |x| \geq 2, \\ f_X(x) = 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

- a1. Determinare il valore di C .
- a2. Calcolare $P(|X| \leq 4)$.
- a3. Calcolare la funzione di ripartizione $F_X(x)$.

Si ponga $Y = X^3$.

- b. Calcolare la densità di probabilità $f_Y(y)$ di Y .
- c. Spiegare perché non ha senso considerare la legge dei grandi numeri per una successione di variabili aleatorie indipendenti Y_n , tutte con la stessa distribuzione di Y .

CORSO DI CALCOLO DELLE PROBABILITÀ (modulo unico)
- PROVA d'esame del 19/02/2003
- Laurea Triennale in Matematica e Quadriennale (ordinamento Salvini)-
(Prof. Nappo - Prof. Piccioni)

Scrivere su ogni foglio NOME e COGNOME. Le risposte devono essere giustificate sui fogli protocollo e riportate nel foglio RISPOSTE.

ESERCIZIO 1. (prima parte)

In un'urna, che inizialmente contiene una sola pallina di colore rosso, vengono inserite un numero aleatorio N di palline bianche.

Viene estratta una pallina dall'urna così formata.

Risolvere l'esercizio in una delle due seguenti situazioni

PRIMA SITUAZIONE:

Sia N una variabile aleatoria che assume solo i valori $\{1, 2, 3\}$ e con

$$P(N = 1) = P(N = 2) = P(N = 3).$$

SECONDA SITUAZIONE :

Sia N una variabile aleatoria con legge di Poisson di media μ

(**Attenzione:** in caso di difficoltà si assuma $\mu = 1$).

a1. Determinare la probabilità p che dall'urna venga estratta la pallina rossa.

(si ponga A l'evento *viene estratta una pallina rossa dall'urna*)

a2. Determinare il valore di $E(\frac{1}{1+N})$.

a3. Sapendo che è stata estratta una pallina rossa, calcolare la probabilità che $N = k$ e stabilire per quale valore di k si ottiene il valore massimo.

ESERCIZIO 1. (seconda parte)

Si ripeta daccapo il procedimento per n urne, utilizzando per ogni urna variabili aleatorie indipendenti N_1, N_2, \dots tutte distribuite come N (ovvero nell'urna i ci sono 1 pallina rossa ed N_i palline bianche, e si estrae una pallina da ciascuna urna).

b1. Calcolare la probabilità p_n che da tutte le urne venga estratta la pallina rossa.

(si ponga A_i l'evento *viene estratta una pallina rossa dall'urna i*)

b2. Calcolare

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n.$$

Sia Y_n la successione di variabili aleatorie

$$Y_n = \prod_{i=1}^n \frac{1}{1 + N_i}, \quad n = 1, 2, \dots$$

c1. Calcolare il valore atteso di Y_n

c2. Utilizzando la disuguaglianza di Markov, mostrare che Y_n converge a zero in probabilità, quando n tende all'infinito (**facoltativo**).

CORSO DI CALCOLO DELLE PROBABILITÀ (modulo unico)

- PROVA d'esame del 19/02/2003

- Laurea Triennale in Matematica e Quadriennale (ordinamento Salvini)-
(Prof. Nappo - Prof. Piccioni)

Scrivere su ogni foglio NOME e COGNOME. Le risposte devono essere giustificate sui fogli protocollo e riportate nel foglio RISPOSTE.

ESERCIZIO 2.

Sia $0 < p < 1$ la probabilità che esca testa lanciando una moneta. Sia X_1 il numero delle croci prima dell'uscita della prima testa in una prima serie di lanci indipendenti. Sia X_2 il numero delle croci prima dell'uscita della prima testa in una serie di lanci indipendenti di una seconda moneta (identica alla prima). Infine, sia $U = \min(X_1, X_2)$
(**Attenzione:** in caso di difficoltà si assuma la moneta bilanciata)

a1. Determinare la legge di U

a2. Determinare il valore atteso $E(U)$.

b1. Determinare la legge di X_1 condizionata a $U = k$.

b2. Determinare se X_1 e U sono indipendenti.

c1. Calcolare $E(X_1|U = k)$.

c2. Verificare che $E(X_1) = E(E(X_1|U))$

CORSO DI CALCOLO DELLE PROBABILITÀ (modulo unico)
- PROVA d'esame del 19/02/2003
- Laurea Triennale in Matematica e Quadriennale (ordinamento Salvini)-
(Prof. Nappo - Prof. Piccioni)

Scrivere su ogni foglio NOME e COGNOME. Le risposte devono essere giustificate sui fogli protocollo e riportate nel foglio RISPOSTE.

ESERCIZIO 3.

Ad una festa danzante partecipano n ragazzi e n ragazze. Ciascuna delle ragazze sceglie a caso¹ uno dei ragazzi, e così si formano n coppie. Alla fine del primo ballo ciascuna coppia lancia una moneta bilanciata, e si scioglie se viene testa. **Successivamente, le ragazze libere** (cioè delle coppie che si sono sciolte) **scelgono a caso² i ragazzi liberi** (cioè delle coppie che si sono sciolte) **e formano nuove coppie** (quindi una coppia può sciogliersi e tornare assieme). Insieme a quelle che non si sono sciolte effettuano un secondo ballo.

Si assuma $n = 3$.

a1. Quanto vale la probabilità che si sciolgano (esattamente) k coppie?

a2. Se si sono sciolte k coppie, tra quante possibilità possono scegliere le k ragazze libere per formare le nuove coppie? (ovvero quante coppie si possono formare?)

a3. Qual è la probabilità che le coppie del primo ballo restino tutte assieme per il secondo ballo?

b1. Qual è la probabilità α che la terza ragazza cambi partner tra il primo e il secondo ballo? (si ponga C_3 l'evento *la terza ragazza cambia partner tra il primo e il secondo ballo*)

b2. Qual è la probabilità che una specifica ragazza cambi partner tra il primo e il secondo ballo? (si ponga C_i l'evento *la ragazza i -esima cambia partner tra il primo e il secondo ballo*)

b3. Posto M uguale al numero delle ragazze (o equivalentemente dei ragazzi) che cambiano partner tra il primo e secondo ballo, scrivere M in termini delle funzioni indicatrici \mathbb{I}_{C_i} e trovare il valore medio di M in funzione di α .

c. Qual è la probabilità β che una fissata coppia costituita da un ragazzo e da una ragazza faccia almeno uno dei due balli assieme? (**facoltativo**)

¹Si pensi ad un meccanismo del tipo: i ragazzi scrivono su un biglietto il proprio nome e mettono il biglietto in un'urna, e le ragazze una dopo l'altra estraggono i biglietti.

²Si pensi ad un meccanismo del tipo: i ragazzi *liberi* scrivono su un biglietto il proprio nome e mettono il biglietto in un'urna, e le ragazze *libere* una dopo l'altra estraggono i biglietti.

ESERCIZIO 1. (prima parte)

In un'urna, che inizialmente contiene una sola pallina di colore rosso, vengono inserite un numero aleatorio N di palline bianche.

Viene estratta una pallina dall'urna così formata.

Risolvere l'esercizio in una delle due seguenti situazioni

PRIMA SITUAZIONE:

Sia N una variabile aleatoria che assume solo i valori $\{1, 2, 3\}$ e con

$$P(N = 1) = P(N = 2) = P(N = 3).$$

SECONDA SITUAZIONE :

Sia N una variabile aleatoria con legge di Poisson di media μ

*(**Attenzione:** in caso di difficoltà si assuma $\mu = 1$).*

a1. *Determinare la probabilità p che dall'urna venga estratta la pallina rossa.*

(si ponga A l'evento viene estratta una pallina rossa dall'urna)

RISPOSTA

$$p = P(A) = \sum_k P(N = k)P(A|\{N = k\}) = \sum_k P(N = k) \frac{1}{k+1}$$

in quanto se nell'urna ci sono k palline bianche ed 1 rossa, la probabilità che esca la pallina rossa vale $1/(k+1)$.

Quindi **PRIMA SITUAZIONE:**

$$p = \frac{13}{36}$$

Infatti

$$p = P(A) = \sum_{k=1}^3 P(N = k)P(A|\{N = k\}) = \sum_{k=1}^3 P(N = k) \frac{1}{k+1} = \frac{1}{3} \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \frac{1}{4} = \frac{13}{36}$$

in quanto necessariamente $P(N = k) = 1/3$ essendo $P(N = k) = \text{cost}$ e $\sum_{k=1}^3 P(N = k) = 1$.

SECONDA SITUAZIONE :

$$p = \frac{1 - e^{-\mu}}{\mu}$$

Infatti, tenendo conto che per una variabile aleatoria N di Poisson di parametro λ si ha $E(N) = \lambda$ si ha

$$\begin{aligned}
p = P(A) &= \sum_{k=1}^{\infty} P(N = k)P(A|\{N = k\}) = \sum_{k=0}^{\infty} P(N = k) \frac{1}{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu} \frac{1}{k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu^k}{(k+1)!} e^{-\mu} \\
&= \frac{1}{\mu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu^{k+1}}{(k+1)!} e^{-\mu} = \frac{e^{-\mu}}{\mu} \left(\sum_{h=1}^{\infty} \frac{\mu^h}{h!} \right) \\
&= \frac{e^{-\mu}}{\mu} \left(\sum_{h=0}^{\infty} \frac{\mu^h}{h!} - 1 \right) = \frac{e^{-\mu}}{\mu} (e^{\mu} - 1) = \frac{1 - e^{-\mu}}{\mu}
\end{aligned}$$

a2. Determinare il valore di $E\left(\frac{1}{1+N}\right)$.

RISPOSTA

$$E\left(\frac{1}{1+N}\right) = p$$

Infatti

$$E\left(\frac{1}{1+N}\right) = \sum_k \frac{1}{k+1} P(N = k)$$

e quindi coincide con il calcolo di p nel punto **a1**.

a3. Sapendo che è stata estratta una pallina rossa, calcolare la probabilità che $N = k$ e stabilire per quale valore di k si ottiene il valore massimo.

RISPOSTA

Si richiede di calcolare

$$P(N = k|A) = \frac{P(N = k)P(A|\{N = k\})}{P(A)} = \frac{P(N = k)P(A|\{N = k\})}{\sum_h P(N = h)P(A|\{N = h\})}$$

PRIMA SITUAZIONE :

$$P(N = 1|A) = \frac{\frac{1}{3} \frac{1}{2}}{\frac{1}{3} \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{13}{12}} = \frac{6}{13}$$

$$P(N = 2|A) = \frac{\frac{1}{3} \frac{1}{3}}{\frac{1}{3} \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{13}{12}} = \frac{4}{13}$$

$$P(N = 3|A) = \frac{\frac{1}{3} \frac{1}{4}}{\frac{1}{3} \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{13}{12}} = \frac{3}{13}$$

(o *ALTERNATIVAMENTE*)

$$P(N = 3|A) = 1 - P(N = 1|A) - P(N = 2|A) = 1 - \frac{6}{13} - \frac{4}{13} = \frac{3}{13}$$

ed il massimo valore risulta $k = 1$.

SECONDA SITUAZIONE: per $k \geq 0$,

$$P(N = k|A) = \frac{P(N = k)P(A|\{N = k\})}{P(A)} = \frac{\frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu} \frac{1}{k+1}}{\frac{1 - e^{-\mu}}{\mu}} = \frac{\mu^{k+1}}{(k+1)!} \frac{e^{-\mu}}{1 - e^{-\mu}}$$

Per ottenere il valore massimo basta considerare che

$$P(N = k|A) = \text{cost} \frac{\mu^{k+1}}{(k+1)!}.$$

Quindi, nel caso $\mu = 1$ il massimo è raggiunto in $k = 0$. Nel caso di μ generico si ha che

$$P(N = k-1|A) \leq P(N = k|A) \Leftrightarrow \frac{\mu^k}{k!} \leq \frac{\mu^{k+1}}{(k+1)!}$$

ovvero

$$1 \leq \frac{\mu}{k+1} \Leftrightarrow k+1 \leq \mu \Leftrightarrow k \leq \mu - 1$$

In particolare il valore di k in cui viene raggiunto il massimo³ è quello per cui $P(N = k-1|A) \leq P(N = k|A)$ e $P(N = k|A) > P(N = k+1|A)$ e quindi quello per cui $k \leq \mu - 1 < k+1$ ⁴.

ESERCIZIO 1. (seconda parte)

Si ripeta daccapo il procedimento per n urne, utilizzando per ogni urna variabili aleatorie indipendenti N_1, N_2, \dots tutte distribuite come N (ovvero nell'urna i ci sono 1 pallina rossa ed N_i palline bianche, e si estrae una pallina da ciascuna urna).

b1. Calcolare la probabilità p_n che da tutte le urne venga estratta la pallina rossa. (si ponga A_i l'evento viene estratta una pallina rossa dall'urna i)

RISPOSTA

$$p_n = p^n$$

Infatti, per l'indipendenza delle variabili aleatorie N_i , risultano indipendenti anche gli eventi A_i e quindi, tenendo conto che $P(A_i) = P(A) = p$, si ha

$$p_n = P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2) \dots P(A_n) = p^n$$

b2. Calcolare

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n.$$

RISPOSTA

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \lim_{n \rightarrow \infty} p^n = 0$$

Sia Y_n la successione di variabili aleatorie

$$Y_n = \prod_{i=1}^n \frac{1}{1 + N_i}, \quad n = 1, 2, \dots$$

c1. Calcolare il valore atteso di Y_n

RISPOSTA

$$E(Y_n) = p^n$$

³In realtà è possibile che i valori in cui il massimo è raggiunto siano due: se vale il segno di uguaglianza in $k \leq \mu - 1$, ovvero se $k = \mu - 1$, allora anche $k - 1$ è punto di massimo.

⁴Quindi $k = \lfloor \mu - 1 \rfloor$ dove $\lfloor x \rfloor$ indica appunto la parte intera (inferiore) di x .

Infatti, per l'indipendenza delle variabili aleatorie N_i , anche le variabili aleatorie $\frac{1}{1+N_i}$ sono indipendenti e quindi il valore atteso del loro prodotto coincide con il prodotto dei valori attesi. Inoltre, avendo N_i ed N la stessa distribuzione si ha

$$E\left(\frac{1}{1+N_i}\right) = E\left(\frac{1}{1+N}\right) = p$$

e perciò

$$E(Y_n) = E\left(\prod_{i=1}^n \frac{1}{1+N_i}\right) = \prod_{i=1}^n E\left(\frac{1}{1+N_i}\right) = p^n.$$

c2. Utilizzando la disuguaglianza di Markov, mostrare che Y_n converge a zero in probabilità, quando n tende all'infinito (**facoltativo** per gli studenti della laurea triennale).

RISPOSTA

Si richiede di mostrare che, qualunque sia $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|Y_n| > \varepsilon) = 0$$

Per la disuguaglianza di Markov

$$0 \leq P(|Y_n| > \varepsilon) = P(Y_n > \varepsilon) \leq \frac{E(Y_n)}{\varepsilon} = \frac{p^n}{\varepsilon} \rightarrow 0$$

Basta poi applicare il Teorema del confronto.

ESERCIZIO 2.

Sia $0 < p < 1$ la probabilità che esca testa lanciando una moneta. Sia X_1 il numero delle croci prima dell'uscita della prima testa in una prima serie di lanci indipendenti. Sia X_2 il numero delle croci prima dell'uscita della prima testa in una serie di lanci indipendenti di una seconda moneta (identica alla prima). Infine, sia $U = \min(X_1, X_2)$ (**Attenzione:** in caso di difficoltà si assuma la moneta bilanciata)

a1. Determinare la legge di U .

RISPOSTA La legge di U è Geometrica (a partire da 0) di parametro $p(2-p)$.

Infatti, per l'indipendenza di X_1 ed X_2 , qualunque sia $h \geq 0$ si ha

$$P(U \geq h) = P(X_1 \geq h, X_2 \geq h) = P(X_1 \geq h)P(X_2 \geq h).$$

e quindi, tenendo conto che X_i hanno legge Geometrica, entrambe di parametro p ,

$$P(U \geq h) = P(X_1 \geq h)P(X_2 \geq h) = \left((1-p)^h\right)^2 = ((1-p)^2)^h.$$

Da questa relazione si deduce immediatamente che per il parametro θ di U vale

$$1 - \theta = (1-p)^2 \Leftrightarrow \theta = 1 - (1-p)^2 = 1 - 1 + 2p - p^2 = 2p - p^2 = p(2-p)$$

Oppure più dettagliatamente, per $h \geq 0$,

$$\begin{aligned} P(U = h) &= P(U \geq h) - P(U \geq h+1) = ((1-p)^2)^h - ((1-p)^2)^{h+1} \\ &= ((1-p)^2)^h (1 - (1-p)^2) = ((1-p)^2)^h (p(2-p)) \end{aligned}$$

ALTERNATIVAMENTE per capire che si tratta di una v.a. geometrica, basta osservare che, se le due monete vengono lanciate simultaneamente, allora U coincide con il numero di lanci (contemporanei) effettuati prima di ottenere per la prima volta che almeno una delle due monete dia testa, e quindi si tratta di prove ripetute di probabilità $p + p - p^2 = p(2 - p)$ (si ricordi che la probabilità di $A \cup B$ è $P(A) + P(B) - P(A \cap B)$).

a2. Determinare il valore atteso $E(U)$.

RISPOSTA

$$E(U) = \frac{1}{\theta} - 1 = \frac{1 - \theta}{\theta} \frac{1}{p(2 - p)} - 1 = \frac{(1 - p)^2}{p(2 - p)}$$

Basta applicare la formula del valore atteso di una Geometrica (a partire da zero) di parametro θ .

b1. Determinare la legge di X_1 condizionata a $U = k$.

RISPOSTA

$$P(X_1 = h | U = k) = \frac{P(X_1 = h, \min(X_1, X_2) = k)}{P(\min(X_1, X_2) = k)}.$$

Va subito notato che se il minimo tra X_1 ed X_2 vale k , necessariamente X_1 può assumere solo valori maggiori o uguali a k . Bisogna però distinguere tra $h = k$ e $h > k$, infatti:

$$P(X_1 = k, \min(X_1, X_2) = k) = P(X_1 = k, X_2 \geq k) = P(X_1 = k)P(X_2 \geq k) = (1 - p)^k p (1 - p)^k$$

mentre, per $h > k$, si ha

$$P(X_1 = h, \min(X_1, X_2) = k) = P(X_1 = h, X_2 = k) = P(X_1 = h)P(X_2 = k) = (1 - p)^h p (1 - p)^k p.$$

e quindi, tenendo conto che $P(U = k) = (1 - p)^{2k} p(2 - p)$ si ha

$$P(X_1 = k | U = k) = \frac{(1 - p)^k p (1 - p)^k}{(1 - p)^{2k} p(2 - p)} = \frac{1}{2 - p}$$

$$P(X_1 = h | U = k) = \frac{(1 - p)^h p (1 - p)^k p}{(1 - p)^{2k} p(2 - p)} = \frac{p}{2 - p} (1 - p)^{h - k} \quad \text{per } h > k$$

Per controllo è bene verificare che

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(X_1 = h | U = k) = 1,$$

e infatti

$$\begin{aligned}\sum_{h=k}^{\infty} P(X_1 = h|U = k) &= P(X_1 = k|U = k) + \sum_{h=k+1}^{\infty} P(X_1 = h|U = k) \\ &= \frac{1}{2-p} + \sum_{h=k+1}^{\infty} \frac{p}{2-p} (1-p)^{h-k} \\ &= \frac{1}{2-p} \left(1 + p \sum_{h-k=1}^{\infty} (1-p)^{h-k} \right) \\ &= \frac{1}{2-p} \left(1 + p \sum_{l=1}^{\infty} (1-p)^l \right) \\ &= \frac{1}{2-p} \left(1 + p(1-p) \sum_{l=0}^{\infty} (1-p)^l \right) = \frac{1}{2-p} \left(1 + p(1-p) \frac{1}{1-(1-p)} \right) \\ &= \frac{1}{2-p} (1 + (1-p)) = 1\end{aligned}$$

b2. Determinare se X_1 e U sono indipendenti.

RISPOSTA Chiaramente X_1 ed U **non sono indipendenti** in quanto $X_1 \geq U$ certamente e quindi, ad esempio,

$$P(X_1 = 0, U = 1) = 0, \text{ mentre } P(X_1 = 0)P(U = 1) > 0,$$

e quindi

$$P(X_1 = 0, U = 1) \neq P(X_1 = 0)P(U = 1)$$

c1. Calcolare $E(X_1|U = k)$.

RISPOSTA

$$E(X_1|U = k) = k + \frac{1-p}{p(2-p)}$$

Infatti

$$\begin{aligned}
E(X_1|U = k) &= \sum_{h=k}^{\infty} hP(X_1 = h|U = k) = k\frac{1}{2-p} + \sum_{h=k+1}^{\infty} h\frac{p}{2-p}(1-p)^{h-k} \\
&= k\frac{1}{2-p} + \sum_{h=k+1}^{\infty} (h-k+k)\frac{p}{2-p}(1-p)^{h-k} \\
&= k\frac{1}{2-p} + \sum_{h=k+1}^{\infty} k\frac{p}{2-p}(1-p)^{h-k} + \sum_{h=k+1}^{\infty} (h-k)\frac{p}{2-p}(1-p)^{h-k} \\
&= k\left(\frac{1}{2-p} + \sum_{h=k+1}^{\infty} \frac{p}{2-p}(1-p)^{h-k}\right) + \sum_{h-k=1}^{\infty} (h-k)\frac{p}{2-p}(1-p)^{h-k} \\
&= k + \frac{p}{2-p}(1-p)\sum_{l=1}^{\infty} l(1-p)^{l-1} \\
&= k + \frac{p}{2-p}(1-p)\sum_{l=0}^{\infty} \frac{d}{dx}x^l \Big|_{x=1-p} \\
&= k + \frac{p}{2-p}(1-p)\frac{d}{dx}\sum_{l=0}^{\infty} x^l \Big|_{x=1-p} \\
&= k + \frac{p}{2-p}(1-p)\frac{d}{dx}\frac{1}{1-x} \Big|_{x=1-p} = k + \frac{p}{2-p}(1-p)\frac{1}{(1-x)^2} \Big|_{x=1-p} \\
&= k + \frac{p}{2-p}(1-p)\frac{1}{(1-(1-p))^2} = k + \frac{1-p}{p(2-p)}
\end{aligned}$$

c2. Verificare che $E(X_1) = E(E(X_1|U))$

RISPOSTA Si ha

$$E(X_1) = \frac{1-p}{p},$$

si tratta quindi di verificare che la variabile aleatoria $E(X_1|U) = U + \frac{1-p}{p(2-p)}$ ha lo stesso valore atteso. E infatti

$$\begin{aligned}
E(E(X_1|U)) &= E\left(U + \frac{1-p}{p(2-p)}\right) = E(U) + \frac{1-p}{p(2-p)} \\
&= \frac{(1-p)^2}{p(2-p)} + \frac{1-p}{p(2-p)} = \frac{1-p}{p(2-p)}(1-p+1) \\
&= \frac{1-p}{p}.
\end{aligned}$$

ESERCIZIO 3.

Ad una festa danzante partecipano n ragazzi e n ragazze. Ciascuna delle ragazze sceglie a caso⁵ uno dei ragazzi, e così si formano n coppie. Alla fine del primo ballo ciascuna coppia

⁵Si pensi ad un meccanismo del tipo: i ragazzi scrivono su un biglietto il proprio nome e mettono il biglietto in un'urna, e le ragazze una dopo l'altra estraggono i biglietti

lancia una moneta bilanciata, e si scioglie se viene testa. **Successivamente, le ragazze libere** (cioè delle coppie che si sono sciolte) **scelgono a caso⁶ i ragazzi liberi** (cioè delle coppie che si sono sciolte) **e formano nuove coppie** (quindi una coppia può sciogliersi e tornare assieme). Insieme a quelle che non si sono sciolte effettuano un secondo ballo.

Si assuma $n = 3$.

a1. Quanto vale la probabilità che si sciolgano (esattamente) k coppie?

RISPOSTA Si tratta dell'evento *il numero delle monete che danno testa è k* coincide con $\{S_n = k\}$, dove S_n è il numero di successi in n prove ripetute (schema di Bernoulli) e quindi

$$P(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad 0 \leq k \leq n$$

a2. Se si sono sciolte k coppie, tra quante possibilità possono scegliere le k ragazze libere per formare le nuove coppie? (ovvero quante coppie si possono formare?)

RISPOSTA In tale caso le ragazze possono scegliere tra $k!$ possibilità, in quanto la prima ragazza *libera* può scegliere tra k ragazzi *liberi*, la seconda tra $k - 1$ e così via.

a3. Qual è la probabilità q che le coppie del primo ballo restino tutte assieme per il secondo ballo?

RISPOSTA

$$q = \frac{17}{24}$$

Ogni volta che si sciolgono k coppie le ragazze possono scegliere tra $k!$ possibilità, mentre una sola possibilità permette a ogni coppia di ricomporsi. Quindi

$$q = \sum_{k=0}^n P(S_n = k) \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \frac{1}{k!}$$

Tenendo conto che S_n conta il numero di teste uscite negli n lanci di moneta, e quindi è una variabile aleatoria $Bin(n, p)$, se p indica la probabilità di ottenere testa.

Nel caso specifico in cui $n = 3$ e $p = 1/2$

$$\begin{aligned} q &= P(S_3 = 0) + P(S_3 = 1) + P(S_3 = 2) \frac{1}{2} + P(S_3 = 3) \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{8} + \binom{3}{1} \frac{1}{8} + \binom{3}{2} \frac{1}{8} \frac{1}{2} + \frac{1}{8} \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{8} \left(1 + 3 + \frac{3}{2} + \frac{1}{6} \right) = \frac{1}{8 \cdot 6} (6 + 18 + 9 + 1) \\ &= \frac{17}{24} \end{aligned}$$

Infatti nel caso in cui nessuna coppia si sciogla o si sciogla una sola coppia sicuramente le coppie si ricompongono, mentre se due coppie si sciolgono solo in un caso su due si ricompongono le coppie iniziali e se si sciolgono tre coppie allora solo in un caso su sei ($= 3!$) si ricompongono tutte le coppie iniziali.

⁶Si pensi ad un meccanismo del tipo: i ragazzi *liberi* scrivono su un biglietto il proprio nome e mettono il biglietto in un'urna, e le ragazze *libere* una dopo l'altra estraggono i biglietti.

b1. Qual è la probabilità α che la terza ragazza cambi partner tra il primo e il secondo ballo? (si ponga C_3 l'evento la terza ragazza cambia partner tra il primo e il secondo ballo)

RISPOSTA

$$\alpha = \frac{5}{24}$$

In generale la ragazza n -sima cambia partner solo se esce testa al suo lancio e poi se nella scelta tra i ragazzi *liberi* non le capita il suo compagno. Nel caso in cui ci siano esattamente h ragazze *libere* tra le altre $n - 1$ ragazze, allora tale probabilità vale $h/(h + 1)$. Quindi

$$\alpha = p \sum_{h=0}^{n-1} P(S_{n-1} = h) \frac{h}{h+1}$$

Nel caso specifico in cui $n = 3$ e $p = 1/2$ si procede così

$$\alpha = \frac{1}{2} \left(P(S_2 = 0) \frac{0}{1} + P(S_2 = 1) \frac{1}{2} + P(S_2 = 2) \frac{2}{3} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \right) = \frac{1}{8} \left(1 + \frac{2}{3} \right) = \frac{5}{24}$$

Alternativamente, nel caso generale, si può calcolare la probabilità del complementare

$$\alpha = P(C_n) = 1 - P(C_n^c),$$

che si calcola tenendo conto che

- se non esce testa al lancio della propria moneta, allora sicuramente mantiene lo stesso partner
- se invece esce testa, e se ci sono esattamente h ragazze *libere* tra le altre $n - 1$ ragazze, allora la probabilità di mantenere lo stesso partner vale $1/(h + 1)$,

$$\begin{aligned} P(C_n^c) &= (1-p) + p \sum_{h=0}^{n-1} P(S_{n-1} = h) \frac{1}{h+1} \\ &= (1-p) + p \sum_{h=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{h!(n-1-h)!} p^h (1-p)^{n-1-h} \frac{1}{h+1} \\ &= (1-p) + \sum_{h=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(h+1)!(n-(h+1))!} p^{h+1} (1-p)^{n-(h+1)} \\ &= (1-p) + \sum_{k=1}^n \frac{(n-1)!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= (1-p) + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= (1-p) + \frac{1}{n} \left(\sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} - (1-p)^n \right) \\ &= (1-p) + \frac{1 - (1-p)^n}{n} \end{aligned}$$

e quindi

$$\alpha = P(C_n) = 1 - P(C_n^c) = 1 - (1-p) - \frac{1 - (1-p)^n}{n} = p - \frac{1 - (1-p)^n}{n}$$

b2. Qual è la probabilità che una specifica ragazza cambi partner tra il primo e il secondo ballo? (si ponga C_i l'evento la ragazza i -esima cambia partner tra il primo e il secondo ballo)

RISPOSTA

$$P(C_i) = \alpha = \frac{5}{24}$$

La probabilità è la stessa per tutte le ragazze per motivi di simmetria e quindi vale

$$P(C_i) = \alpha.$$

b3. Posto M uguale al numero delle ragazze (o equivalentemente dei ragazzi) che cambiano partner tra il primo e secondo ballo, scrivere M in termini delle funzioni indicatrici \mathbb{I}_{C_i} e trovare il valore medio di M in funzione di α .

RISPOSTA

$$E(M) = \frac{5}{8}$$

Poiché M conta il numero delle ragazze che cambiano partner e $\mathbb{I}_{C_i} = 1$ se e solo se l' i -esima ragazza cambia partner si ha

$$M = \sum_{k=1}^n \mathbb{I}_{C_k}$$

e quindi

$$E(M) = \sum_{k=1}^n E(\mathbb{I}_{C_k}) = \sum_{k=1}^n P(C_k) = n\alpha = n \left(p - \frac{1 - (1-p)^n}{n} \right) = np - 1 + (1-p)^n$$

Nel caso $n = 3$ e $p = 1/2$ si ha

$$M = \mathbb{I}_{C_1} + \mathbb{I}_{C_2} + \mathbb{I}_{C_3}$$

e

$$E(M) = E(\mathbb{I}_{C_1}) + E(\mathbb{I}_{C_2}) + E(\mathbb{I}_{C_3}) = 3\alpha = 3 \frac{5}{24} = \frac{5}{8}$$

c. Qual è la probabilità β che una fissata coppia costituita da un ragazzo e da una ragazza faccia almeno uno dei due balli assieme? (**facoltativo**)

RISPOSTA

$$\beta = \frac{29}{72}$$

La probabilità cercata si calcola tenendo conto che la coppia prefissata balla almeno una volta insieme

- o se ballano insieme il primo ballo (con probabilità $\frac{1}{n} = \frac{(n-1)!}{n!}$)
 - o, se non ballano insieme il primo ballo (con probabilità $1 - \frac{1}{n}$, quando sia la ragazza che il ragazzo diventano *liberi* per il secondo ballo (con probabilità p^2), e poi, se ci sono ancora h ragazze *libere* tra le altre $n - 2$ coppie, alla ragazza tocca in sorte il ragazzo (con probabilità $\frac{1}{h+2}$).

Quindi la probabilità cercata vale

$$\frac{1}{n} + \frac{n-1}{n} p^2 \sum_{h=0}^{n-2} P(S_{n-2} = h) \frac{1}{h+2}$$

e nel caso $n = 3$ e $p = 1/2$ viene

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \frac{1}{4} \left(P(S_1 = 0) \frac{1}{2} + P(S_1 = 1) \frac{1}{3} \right) &= \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \frac{1}{3} \right) \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{4} \frac{5}{6} \right) = \frac{1}{3} \frac{29}{24} = \frac{29}{72} \end{aligned}$$

Nel caso generale, tenendo conto che

$$\begin{aligned} p^2 \sum_{h=0}^{n-2} P(S_{n-2} = h) \frac{1}{h+2} &= p^2 \sum_{h=0}^{n-2} \frac{(n-2)!}{h!(n-2-h)!} p^h (1-p)^{n-2-h} \frac{h+1}{(h+1)(h+2)} \\ &= \sum_{h=0}^{n-2} \frac{(n-2)!}{(h+2)!(n-(h+2))!} p^{h+2} (1-p)^{n-(h+2)} (h+1) \\ &= \sum_{k=2}^n \frac{(n-2)!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} (k-1) \\ &= \frac{1}{n(n-1)} \sum_{k=2}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} (k-1) \\ &= \frac{1}{n(n-1)} \left(\sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} (k-1) - \sum_{k=0}^1 \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} (k-1) \right) \\ &= \frac{1}{n(n-1)} \left(\sum_{k=0}^n P(S_n = k) (k-1) - (1-p)^n (0-1) - n p (1-p)^{n-1} (1-1) \right) \\ &= \frac{1}{n(n-1)} (E(S_n - 1) + (1-p)^n) = \frac{1}{n(n-1)} (np - 1 + (1-p)^n) \end{aligned}$$

si ottiene che

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{1}{n} + \frac{n-1}{n} p^2 \sum_{h=0}^{n-2} P(S_{n-2} = h) \frac{1}{h+2} \\ &= \frac{1}{n} + \frac{n-1}{n} \frac{1}{n(n-1)} (np - 1 + (1-p)^n) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \left(p - \frac{1 - (1-p)^n}{n} \right) \\ &= \frac{1}{n} \left(1 + p - \frac{1 - (1-p)^n}{n} \right) = \frac{1}{n} (1 + \alpha) \end{aligned}$$