CORSO DI CALCOLO DELLE PROBABILITÀ (1^o modulo)
- PROVA in ITINERE del 12/11/2002
- Laurea Quadriennale in Matematica - (Prof. Nappo)

Scrivere su ogni foglio NOME e COGNOME. Le risposte devono essere giustificate sui fogli protocollo e riportate nel foglio RISPOSTE.

ESERCIZIO 1. Siano date tre urne contenenti ciascuna 4 palline e con la seguente composizione.

$$\text{Urna1}: \ 1\,b \text{ e } 3r; \qquad \text{Urna 2}: \ 2\,b \text{ e } 2r; \qquad \text{Urna 3}: \ 3\,b \text{ e } 1r;$$

dove b sta per bianche, ed r sta per rosse.
Si lancia un dado e si sceglie l'urna 1 se esce il numero 1, si sceglie l'urna 3 se esce un numero maggiore di 3 e l'urna 2 nei rimanenti casi. Si ponga U_i l'evento {*viene scelta l'urna* i }, per $i = 1, 2, 3$.
Dopo aver scelto l'urna si estraggono, sempre dalla stessa urna, 2 palline **senza reinserimento**. Si ponga E_k l'evento {*vengono estratte (esattamente)* k *palline bianche* }, per $k = 0, 1, 2$.

a1) Calcolare $\mathbb{P}(E_k)$, per $k = 0, 1, 2$. (**N.B.** si intendono le probabilità a priori, cioè prima di effettuare qualsiasi lancio e/o estrazione)
a2) Calcolare la probabilità che esca almeno una pallina bianca.
b) Calcolare la probabilità di U_i, per $i = 1, 2, 3$, **sapendo che** sono state estratte 1 pallina bianca e 1 pallina rossa.

Si supponga ora che dopo l'operazione precedentemente descritta, si scelga a caso un'altra urna tra le due urne rimaste, e che si proceda all'estrazione di un'altra pallina (la terza estratta). Si ponga V_j l'evento {*la seconda urna scelta è l'urna* j }, per $j = 1, 2, 3$. Si ponga F l'evento {*la terza pallina estratta è bianca* }.

c1) Calcolare $\mathbb{P}(U_i \cap V_j)$, per $i, j = 1, 2, 3$, e calcolare $\mathbb{P}(V_j)$, per $j = 1, 2, 3$.
(**N.B.** si intendono le probabilità a priori, cioè prima di effettuare qualsiasi lancio e/o estrazione)
c2) Gli eventi U_1 e V_1 sono indipendenti? Gli eventi U_1 e V_2 sono indipendenti?
c3) Calcolare $\mathbb{P}(F)$.
c4) (facoltativo) Calcolare la probabilità dell'evento F, **sapendo che** nelle precedenti estrazioni state estratte 1 pallina bianca e 1 pallina rossa.

ESERCIZIO 2. Una ditta è composta da tre fabbriche, una ad Ancona, una a Bari ed una a Catania. Le tre fabbriche producono pezzi tutti uguali all'apparenza, tuttavia ad Ancona il 5% dei pezzi prodotti risulta difettoso, a Bari il 10% dei pezzi prodotti risulta difettoso, ed infine a Catania il 15% dei pezzi prodotti risulta difettoso. Il 50% dei pezzi prodotti proviene da Catania, il 30% da Ancona ed il rimanente dei pezzi prodotti proviene da Bari. I pezzi prodotti vengono immagazzinati tutti a Bari, in modo che non sia immediatamente riconoscibile da quale fabbrica provengono. Si prende un pezzo a caso nel magazzino.
Si ponga A ={*il pezzo esaminato proviene da Ancona*}, B ={*il pezzo esaminato proviene da Bari*}, C ={*il pezzo esaminato proviene da Catania*}, ed infine D ={*il pezzo esaminato è difettoso*}.

a) Calcolare la probabilità che il pezzo scelto risulti difettoso.
b) Se il pezzo esaminato risulta difettoso, calcolare la probabilità che il pezzo scelto provenga da Bari.

CORSO DI CALCOLO DELLE PROBABILITÀ (1^o modulo)
- SOLUZIONI della PROVA in ITINERE del 12/11/2002
- Laurea Quadriennale in Matematica - (Prof. Nappo)

ESERCIZIO 1. *Siano date tre urne contenenti ciascuna 4 palline e con la seguente composizione.*

$$Urna 1: \ 1\,b \text{ e } 3r; \qquad Urna\ 2: \ 2\,b \text{ e } 2r; \qquad Urna\ 3: \ 3\,b \text{ e } 1r;$$

dove b sta per bianche, ed r sta per rosse.
Si lancia un dado e si sceglie l'urna 1 se esce il numero 1, si sceglie l'urna 3 se esce un numero maggiore di 3 e l'urna 2 nei rimanenti casi. Si ponga U_i l'evento {viene scelta l'urna i }, *per* $i = 1, 2, 3$.
Dopo aver scelto l'urna si estraggono, sempre dalla stessa urna, 2 palline ***senza reinserimento****.*
Si ponga E_k l'evento {vengono estratte k palline bianche }, *per* $k = 0, 1, 2$.

a1) *Calcolare $\mathbb{P}(E_k)$, per $k = 0, 1, 2$. (**N.B.** si intendono le probabilità a priori, cioè prima di effettuare qualsiasi lancio e/o estrazione)*

Per il procedimento di scelta dell'urna si ha che

$$\mathbb{P}(U_1) = \frac{1}{6}; \quad \mathbb{P}(U_2) = \frac{2}{6}; \quad \mathbb{P}(U_3) = \frac{3}{6};$$

o più brevemente

$$\mathbb{P}(U_i) = \frac{i}{6}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Inoltre essendo le due estrazioni senza rimbussolamento si ha:

$$\mathbb{P}(E_0|U_1) = \frac{\binom{1}{0}\binom{3}{2}}{\binom{4}{2}} = \frac{1 \cdot 3}{6}; \quad \mathbb{P}(E_0|U_2) = \frac{\binom{2}{0}\binom{2}{2}}{\binom{4}{2}} = \frac{1 \cdot 1}{6}; \quad \mathbb{P}(E_0|U_3) = 0;$$

$$\mathbb{P}(E_1|U_1) = \frac{\binom{1}{1}\binom{3}{1}}{\binom{4}{2}} = \frac{1 \cdot 3}{6}; \quad \mathbb{P}(E_1|U_2) = \frac{\binom{2}{1}\binom{2}{1}}{\binom{4}{2}} = \frac{2 \cdot 2}{6}; \quad \mathbb{P}(E_1|U_3) = \frac{\binom{3}{1}\binom{1}{1}}{\binom{4}{2}} = \frac{3 \cdot 1}{6};$$

$$\mathbb{P}(E_2|U_1) = 0; \qquad \mathbb{P}(E_2|U_2) = \frac{\binom{2}{2}\binom{2}{0}}{\binom{4}{2}} = \frac{1 \cdot 1}{6}; \quad \mathbb{P}(E_2|U_3) = \frac{\binom{3}{2}\binom{1}{0}}{\binom{4}{2}} = \frac{3 \cdot 1}{6};$$

più rapidamente

$$\mathbb{P}(E_k|U_i) = \frac{\binom{i}{k}\binom{4-i}{2-k}}{\binom{4}{2}}; \qquad \text{per } \begin{cases} 0 \le k \le i \\ 0 \le 2-k \le 4-i \end{cases}$$

Alternativamente si può osservare che, posto

$$B_1 = \{\textit{la prima pallina estratta è bianca}\}; \quad B_2 = \{\textit{la seconda pallina estratta è bianca}\};$$

$$R_1 = B_1^c = \{\textit{la prima pallina estratta è bianca}\}; \quad R_2 = B_2^c = \{\textit{la seconda pallina estratta è bianca}\};$$

si ha

$$E_0 = B_1 \cap B_2; \qquad E_1 = (B_1 \cap R_2) \cup (R_1 \cap B_2); \qquad E_3 = R_1 \cap R_2;$$

per cui, indicando $\mathbb{P}_{U_i}(A) = \mathbb{P}(A|U_i)$ per ogni evento A,

- $\mathbb{P}_{U_i}(E_0) = \mathbb{P}_{U_i}(R_1)\mathbb{P}_{U_i}(R_2|R_1) = \frac{4-i}{4}\frac{4-i-1}{3}$
- $\mathbb{P}_{U_i}(E_1) = \mathbb{P}_{U_i}(B_1)\mathbb{P}_{U_i}(R_2|B_1) + \mathbb{P}_{U_i}(R_1)\mathbb{P}_{U_i}(B_2|R_1) = \frac{i}{4}\frac{4-i}{3} + \frac{4-i}{4}\frac{i}{3} = 2\ \frac{4-i}{4}\frac{i}{3} =$
- $\mathbb{P}_{U_i}(E_2) = \mathbb{P}_{U_i}(B_1)\mathbb{P}_{U_i}(B_2|B_1) = \frac{i}{4}\frac{i-1}{3}$

Poiché $\{U_1, U_2, U_3\}$ formano una partizione dell'evento certo, per la formula delle probabilità totali si ha

$$\mathbb{P}(E_k) = \sum_{i=1}^{3} \mathbb{P}(U_i)\mathbb{P}(E_k|U_i).$$

Effettuando i calcoli si ottiene

$$\mathbb{P}(E_0) = \frac{5}{36}; \qquad \mathbb{P}(E_1) = \frac{20}{36}; \qquad \mathbb{P}(E_2) = \frac{11}{36}.$$

Si noti che

$$\sum_{k=1}^{3} \mathbb{P}(E_k) = 1,$$

quindi, ad esempio, una volta calcolati $\mathbb{P}(E_0)$ e $\mathbb{P}(E_2)$ automaticamente si ha che $\mathbb{P}(E_1) = 1 - \big(\mathbb{P}(E_0) + \mathbb{P}(E_2)\big)$. Con questa osservazione si possono accorciare i calcoli [1].

a2) *Calcolare la probabilità che esca almeno una pallina bianca.*

Si tratta di calcolare la probabilità dell'evento $A = E_1 \cup E_2 = E_0^c$ [2], e quindi $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(E_1) + \mathbb{P}(E_2) = \frac{20}{36} + \frac{11}{36} = \frac{31}{36}$, oppure $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(E_0) = 1 - \frac{5}{36} = \frac{31}{36}$.

b) *Calcolare la probabilità di U_i, per $i = 1, 2, 3$, **sapendo che** sono state estratte 1 pallina bianca e 1 pallina rossa.*

Poiché sappiamo che sono state estratte 1 pallina bianca e 1 pallina rossa, ovvero sappiamo che si è verificato l'evento E_1, si tratta di calcolare $\mathbb{P}(U_i|E_1)$, per $i = 1, 2, 3$. Possiamo quindi utilizzare la formula di Bayes:

$$\mathbb{P}(U_i|E_1) = \frac{\mathbb{P}(U_i)\mathbb{P}(E_1|U_i)}{\sum_{j=1}^{3} \mathbb{P}(U_j)\mathbb{P}(E_1|U_j)}$$

che in questo caso fornisce

$$\mathbb{P}(U_i|E_1) = \frac{\frac{i}{6}\frac{i(4-i)}{6}}{\sum_{j=1}^{3} \frac{j}{6}\frac{j(4-j)}{6}} = \frac{i^2(4-i)}{\sum_{j=1}^{3} j^2(4-j)}.$$

[1] Una considerazione analoga vale anche per le probabilità condizionate: $\sum_{k=1}^{3} \mathbb{P}_{U_i}(E_k) = 1$, quindi, ad esempio, una volta calcolati $\mathbb{P}_{U_i}(E_0)$ e $\mathbb{P}_{U_i}(E_1)$ automaticamente si ha che $\mathbb{P}_{U_i}(E_2) = 1 - \big(\mathbb{P}_{U_i}(E_0) + \mathbb{P}_{U_i}(E_1)\big)$.

[2] L'evento che esca almeno una pallina bianca si verifica se e solo se viene estratta esattamente una pallina bianca oppure se vengono estratte esattamente due palline bianche. Equivalentemente si verifica se NON si verifica l'evento *il numero di palline bianche estratte è zero*, o in altre parole: *nessuna pallina bianca viene estratta*. ATTENZIONE in italiano la doppia negazione continua a negare!! quindi a parole si potrebbe dire anche *non viene estratta nessuna pallina bianca*.

Di conseguenza

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(U_1|E_1) &= \frac{1^2(4-1)}{1^2(4-1)+2^2(4-2)+3^2(4-3)} = \frac{3}{3+8+9} = \frac{3}{20};\\
\mathbb{P}(U_2|E_1) &= \frac{2^2(4-2)}{1^2(4-1)+2^2(4-2)+3^2(4-3)} = \frac{8}{3+8+9} = \frac{8}{20};\\
\mathbb{P}(U_3|E_1) &= \frac{3^2(4-3)}{1^2(4-1)+2^2(4-2)+3^2(4-3)} = \frac{9}{3+8+9} = \frac{9}{20};\\
\big(\text{ oppure } &= 1-\big(\mathbb{P}(U_1|E_1)+\mathbb{P}(U_2|E_1)\big) = 1-\frac{3+8}{20}\big) = \frac{9}{20}
\end{aligned}
$$

Si supponga ora che dopo l'operazione precedentemente descritta, si scelga a caso un'altra urna tra le due urne rimaste, e che si proceda all'estrazione di un'altra pallina (la terza estratta). Si ponga V_j l'evento {la seconda urna scelta è l'urna j }, *per $j=1,2,3$. Si ponga F l'evento* {la terza pallina estratta è bianca }.

c1) *Calcolare $\mathbb{P}(U_i\cap V_j)$, per $i,j=1,2,3$, e calcolare $\mathbb{P}(V_j)$, per $j=1,2,3$. (**N.B.** si intendono le probabilità a priori, cioè prima di effettuare qualsiasi lancio e/o estrazione)*
Innanzitutto si ha che $\mathbb{P}(U_i\cap V_i)=\mathbb{P}(\emptyset)=0$, poiché non è possibile scegliere nuovamente l'urna i, se l'urna i è stata scelta per prima. Inoltre, la seconda urna viene scelta *a caso* tra le rimanenti[3], e quindi $\mathbb{P}(V_j|U_i)=\frac{1}{2}$. Di conseguenza

$$
\mathbb{P}(U_i\cap V_j)=\mathbb{P}(U_i)\mathbb{P}(V_j|U_i)=\frac{i}{6}\frac{1}{2}=\frac{i}{12}, \qquad \text{per } i\neq j.
$$

Inoltre

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(V_1) &= \mathbb{P}(U_2)\mathbb{P}(V_1|U_2)+\mathbb{P}(U_3)\mathbb{P}(V_1|U_3) = \frac{2}{6}\frac{1}{2}+\frac{3}{6}\frac{1}{2} = \frac{5}{12},\\
\mathbb{P}(V_2) &= \mathbb{P}(U_1)\mathbb{P}(V_2|U_1)+\mathbb{P}(U_3)\mathbb{P}(V_2|U_3) = \frac{1}{6}\frac{1}{2}+\frac{3}{6}\frac{1}{2} = \frac{4}{12},\\
\mathbb{P}(V_3) &= \mathbb{P}(U_1)\mathbb{P}(V_3|U_1)+\mathbb{P}(U_2)\mathbb{P}(V_3|U_2) = \frac{1}{6}\frac{1}{2}+\frac{2}{6}\frac{1}{2} = \frac{3}{12},
\end{aligned}
$$

(anche se al solito basta calcolarne due valori ed il terzo è automaticamente determinato dalla condizione che la somma deve valere 1)

c2) *Gli eventi U_1 e V_1 sono indipendenti? Gli eventi U_1 e V_2 sono indipendenti?*
In entrambi i casi NON si ha indipendenza. Per rispondere ci sono due modi: o controllare che

$$
\mathbb{P}(U_i\cap V_j)\neq\mathbb{P}(U_i)\mathbb{P}(V_j);
$$

oppure, equivalentemente, che

$$
\mathbb{P}(V_j|U_i)\neq\mathbb{P}(V_j).
$$

Per $i=j=1$ ciò è evidente, ed è un caso generale: $\mathbb{P}(U_i\cap V_j)=0$, mentre $\mathbb{P}(U_i)>0$ e $\mathbb{P}(V_j)>0$. Per $i=1$ e $j=2$: abbiamo calcolato che $\mathbb{P}(V_2)=\frac{1}{3}$ che è diverso dal dato del problema $\mathbb{P}(V_2|U_1)=\frac{1}{2}$.

c3) *Calcolare $\mathbb{P}(F)$.*
Di nuovo si tratta di utilizzare la formula delle probabilità totali: in questo caso per l'evento F e

[3] cioè, qualsiasi urna sia stata scelta per prima, si hanno due casi possibili e sono equiprobabili

per la partizione $\{V_1, V_2, V_3\}$. Ovviamente, se sappiamo quale urna sia stata scelta per seconda, conosciamo la sua composizione e quindi la probabilità di estrarre una pallina bianca è data dal rapporto tra le palline bianche e il numero totale di palline: $\mathbb{P}(F|V_j) = \frac{j}{4}$. Perciò

$$\mathbb{P}(F) = \sum_{j=1}^{3} \mathbb{P}(V_j)\mathbb{P}(F|V_j) = \frac{5}{12}\frac{1}{4} + \frac{4}{12}\frac{2}{4} + \frac{3}{12}\frac{3}{4} = \frac{5+8+9}{48} = \frac{22}{48} = \frac{11}{24}.$$

c4) (facoltativo) *Calcolare la probabilità dell'evento F,* ***sapendo che*** *nelle precedenti estrazioni state estratte 1 pallina bianca e 1 pallina rossa.*

Analogamente al punto b) si richiede di calcolare $\mathbb{P}(F|E_1)$.
In questo caso la formula di Bayes non ci aiuta immediatamente e può risultare più comodo utilizzare la definizione della probabilità condizionata: $\mathbb{P}(F|E_1) = \frac{\mathbb{P}(F\cap E_1)}{\mathbb{P}(E_1)}$.

Il denominatore è noto ($\mathbb{P}(E_1) = \frac{20}{36}$, mentre rimane da calcolare il numeratore. Questo calcolo è leggermente più complesso degli altri: infatti si tratta di individuare la partizione giusta: in questo caso conviene utilizzare la partizione $\{U_i \cap V_j \; i,j \in \{1,2,3\}, i \neq j\}$

$$\mathbb{P}(F \cap E_1) = \sum_{i\neq j}^{1\leq i,j\leq 3}\sum \mathbb{P}(F \cap E_1|U_i \cap V_j)\mathbb{P}(U_i \cap V_j).$$

Rimane il problema di calcolare $\mathbb{P}(F \cap E_1|U_i \cap V_j)$. A prima vista può sembrare difficoltoso, tuttavia se ci si riflette un momento ci si accorge che tale probabilità corrisponde alla probabilità di estrarre 1 pallina bianca e 1 rossa dalla urna i e di estrarre dall'urna j una pallina bianca, di conseguenza

$$\mathbb{P}(F \cap E_1|U_i \cap V_j) = \mathbb{P}(E_1|U_i)\mathbb{P}(F|V_j) = \frac{i(4-i)}{6}\frac{j}{4}$$

$\big($ovvero **note la prima e la seconda urna scelta** gli eventi F ed E_1 sono indipendenti$\big)$, e alla fine si ha

$$\mathbb{P}(F \cap E_1) = \sum_{i\neq j}^{1\leq i,j\leq 3}\sum \frac{i(4-i)}{6}\frac{j}{4}\frac{i}{6}\frac{1}{2} = \frac{1}{6\cdot 4\cdot 6\cdot 2}\sum_{i\neq j}^{1\leq i,j\leq 3}\sum i^2(4-i)j$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(F \cap E_1) &= \frac{1}{6\cdot 4\cdot 6\cdot 2}\big(1^2(4-1)2 + 1^2(4-1)3 + 2^2(4-2)1 + 2^2(4-2)3 + 3^2(4-3)1 + 3^2(4-3)2\big) \\ &= \frac{1}{36\cdot 8}\big(3\cdot 5 + 8\cdot 4 + 9\cdot 3\big) = \frac{15+32+27}{36\cdot 8} = \frac{74}{36\cdot 8}.\end{aligned}$$

Ricapitolando

$$\mathbb{P}(F|E_1) = \frac{\mathbb{P}(F\cap E_1)}{\mathbb{P}(E_1)} = \frac{\frac{74}{36\cdot 8}}{\frac{20}{36}} = \frac{74}{8\cdot 20} = \frac{37}{80}.$$

Può essere utile osservare che $\mathbb{P}(F|E_1)(=\frac{37}{80}) \neq \mathbb{P}(F)(=\frac{11}{24})$, anzi possiamo anche osservare che

$$\mathbb{P}(F|E_1) = \frac{37}{80} > \mathbb{P}(F) = \frac{11}{24},$$

ovvero gli eventi F ed E_1 sono correlati positivamente, nonostante fossero indipendenti condizionatamente agli eventi $U_i \cap V_j$, cioè rispetto alle probabilità $\mathbb{P}_{U_i\cap V_j}(\cdot)$.
Infine è importante osservare che si poteva procedere anche in altro modo:

$$\mathbb{P}(F|E_1) = \mathbb{P}_{E_1}(F) = \sum_{j=1}^{3}\mathbb{P}_{E_1}(V_j)\mathbb{P}_{E_1}(F|V_j)$$

Inoltre $\mathbb{P}_{E_1}(F|V_j) = \mathbb{P}(F|V_j) = \frac{j}{4}$, mentre

$$\mathbb{P}_{E_1}(V_j) = \sum_{i \neq j}^{1 \leq j \leq 3} \mathbb{P}_{E_1}(U_i)\mathbb{P}_{E_1}(V_j|U_i) = \sum_{i=1}^{3} \mathbb{P}_{E_1}(U_i)\mathbb{P}(V_j|U_i) = \sum_{i \neq j}^{1 \leq j \leq 3} \mathbb{P}_{E_1}(U_i)\frac{1}{2}$$

Completando i conti si arriva allo stesso risultato $\mathbb{P}_{E_1}(F) = \frac{37}{80}$.

ESERCIZIO 2. *Una ditta è composta da tre fabbriche, una ad Ancona, una a Bari ed una a Catania. Le tre fabbriche producono pezzi tutti uguali all'apparenza, tuttavia ad Ancona il* 5% *dei pezzi prodotti risulta difettoso, a Bari il* 10% *dei pezzi prodotti risulta difettoso, ed infine a Catania il* 15% *dei pezzi prodotti risulta difettoso. Il* 50% *dei pezzi prodotti proviene da Catania, il* 30% *da Ancona ed il rimanente dei pezzi prodotti proviene da Bari. I pezzi prodotti vengono immagazzinati tutti a Bari, in modo che non sia immediatamente riconoscibile da quale fabbrica provengono. Si prende un pezzo a caso nel magazzino.*
Si ponga A ={il pezzo esaminato proviene da Ancona}, B ={il pezzo esaminato proviene da Bari}, C ={il pezzo esaminato proviene da Catania}, *ed infine* D ={il pezzo esaminato è difettoso}.

a) *Calcolare la probabilità che il pezzo scelto risulti difettoso.*

I dati del problema sono:

$$\mathbb{P}(A) = 30\% = \frac{3}{10}; \qquad \mathbb{P}(B) = 20\% = \frac{2}{10}; \qquad \mathbb{P}(C) = 50\% = \frac{5}{10};$$

$\big($al solito $\mathbb{P}(B) = 1 - \{\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(C)\}$ $\big)$
e inoltre

$$\mathbb{P}(D|A) = 5\% = \frac{5}{100}; \qquad \mathbb{P}(D|B) = 10\% = \frac{10}{100}; \qquad \mathbb{P}(D|C) = 15\% = \frac{15}{100};$$

quindi

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(D) &= \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(D|A) + \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(D|B) + \mathbb{P}(C)\mathbb{P}(D|C) \\ &= \frac{3}{10}\frac{5}{100} + \frac{2}{10}\frac{10}{100} + \frac{5}{10}\frac{15}{100} = \frac{15+20+75}{1000} = \frac{110}{1000} = \frac{11}{100} = 11\% \end{aligned}$$

b) Se *il pezzo esaminato risulta difettoso, calcolare la probabilità che il pezzo scelto provenga da Bari.*

Si tratta di calcolare $\mathbb{P}(B|D)$ e quindi

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B|D) &= \frac{\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(D|B)}{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(D|A) + \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(D|B) + \mathbb{P}(C)\mathbb{P}(D|C)} \\ &= \frac{\frac{2}{10}\frac{10}{100}}{\frac{3}{10}\frac{5}{100} + \frac{2}{10}\frac{10}{100} + \frac{5}{10}\frac{15}{100}} \\ &= \frac{2 \cdot 10}{3 \cdot 5 + 2 \cdot 10 + 5 \cdot 15} = \frac{20}{15+20+75} = \frac{20}{110} = \frac{2}{11} \cong 18,18\%. \end{aligned}$$

ESAME DI CALCOLO DELLE PROBABILITÀ(1^o modulo) 11/11/2002
FOGLIO RISPOSTE

NOME..
COGNOME..

ESERCIZIO 1.

a1)
....
....
....
....
....
....

a2)
....
....

b)
....
....

c1)
....
....
....
....
....

c2)
....
....
....
....

c3)
....
....

c4)(facoltativo)
....
....

ESERCIZIO 2.

a)
....
....

b)
....
....

....
....
....
....
....
....

c2) legge marginale di U
....
....
legge marginale di V
....
....

ESERCIZIO 3. Una prima urna contiene 5 monete eque, mentre una seconda urna (esternamente identica alla prima urna) contiene 3 monete eque ed 2 monete truccate. Sia 1/3 la probabilità che esca testa, per ciascuna moneta truccata.
Viene scelta un'urna a caso e da essa viene estratta una moneta, che viene lanciata due volte. Si pongano $A = \{\textit{è stata scelta la prima urna}\}$, $B = \{\textit{è stata scelta la seconda urna}\}$, $E_i = \{\textit{all'i}-\textit{simo lancio esce testa}\}$, $i = 1, 2$.
a1) Calcolare $P(E_1|B)$. **a2)** Calcolare la probabilità dell'evento E_1.
a3) Sapendo che è uscita testa nel primo lancio, calcolare la probabilità dell'evento A e quella dell'evento B.
b1) Calcolare la probabilità dell'evento E_2.
b2) Sapendo che è uscita testa nel primo lancio della moneta estratta, calcolare la probabilità dell'evento E_2. Gli eventi E_1 ed E_2 sono indipendenti?
c) Sapendo che è uscita testa sia nel primo che nel secondo lancio, calcolare la probabilità dell'evento A.

ESERCIZIO 4. Si ricorda che al gioco del lotto ci sono 10 ruote e che per ciascuna ruota vengono estratti, senza reinserimento, 5 numeri da un'urna che contiene 90 palline numerate da 1 a 90.

a) Calcolare la probabilità α che il numero 1 esca in una estrazione del lotto sulla ruota di Roma.

b) Trovare l'espressione della probabilità β che il numero 1 esca (in almeno una ruota), in una estrazione del lotto.

c) Scrivere l'espressione della probabilità γ che, nelle prossime 100 estrazioni, il numero 1 esca, sulla ruota di Roma, almeno 10 volte.

d) Usando il teorema centrale del limite, calcolare approssimativamente la probabilità γ che, nelle prossime 100 estrazioni, il numero 1 esca, sulla ruota di Roma, almeno 10 volte. (**Suggerimento**: per semplificare i calcoli si consideri che $\sqrt{17} \simeq 4,1$)

ESAME DI CALCOLO DELLE PROBABILITÀ(1^o modulo) 11/11/2002
FOGLIO RISPOSTE

NOME..
COGNOME..

ESERCIZIO 1.

a1) .... **a2)** ....

b) .... **c)** ....

ESERCIZIO 2.

a1) .... **a2)** p=...................... q=.............................

b1) $Cov(X, Y)$= .... **b2)** retta di regressione
....
....
....

c1) legge congiunta di U e V
....
....
....

c2) legge marginale di U
....
....

legge marginale di V
....
....

ESERCIZIO 3.

a1) .... **a2)**..................................

a3)...

b1) .... **b2)** ....

c) ....

ESERCIZIO 4.

a) .... **b)**.....................................

c)..................................... **d)** ....