PROGRAMMA DI CALCOLO DELLE PROBABILITÀ(1^o modulo)

periodo: I Semestre , A. A. 2002/03

docente: Giovanna Nappo, (ufficio n.109, tel. 49913262, e-mail: nappo@mat.uniroma1.it)

Prerequisiti: Nozioni di base di Analisi Matematica, Algebra e Geometria, del primo biennio.

Obiettivi : Acquisizione delle nozioni di base di Probabilità. Studio di alcuni modelli probabilistici. Descrizione e trasformazioni di variabili aleatorie. Acquisizione dei risultati fondamentali del Calcolo delle Probabilità (Legge dei Grandi Numeri e Teorema Centrale del Limite) in casi semplici.

TESTI CONSIGLIATI: TEORIA -

- G. Dall'Aglio, - Calcolo delle Probabilità, Zanichelli (II ed.) 2000
- P. Baldi, Calcolo delle Probabilità e Statistica, Mc Graw Hill 1992.
- G. R. Grimmet, D. Stirzaker, Probability and Random Processes, Oxford University Press 1992. (e relativo libro di soluzione degli esercizi)
- G. Koch, La matematica del probabile, Aracne 1997.

TESTI CONSIGLIATI: ESERCIZI

A. Frigessi, Calcolo delle Probabilità, (serie Tutor), ETAS libri 1994.

M. Cerasoli, Problemi risolti di Calcolo delle Probabilità, Casa Ed. Ambrosiana, Milano, 1992.

ALTRI TESTI CONSIGLIATI:

L. Breiman, Probability, Addison Wesley, 1968;

Y.S. Chow, H. Teicher, Probability Theory, Springer Verlag, 1988;

B. De Finetti, Teoria delle Probabilità, Einaudi, 1970;

W. Feller, An introduction to probability theory and its applications, Wiley & Sons, 1970

Sono disponibili alcuni APPUNTI, che però non coprono interamente il programma, e testi di ESERCIZI d'ESAME.

Programma:

(**legenda:** gli argomenti con asterisco ed in corsivo non sono stati svolti a lezione e non fanno parte del programma, per quest'anno accademico)

A. INTRODUZIONE:

1.Cenni storici, fenomeni aleatori, grandezze aleatorie, interpretazione delle
operazioni booleane su eventi, probabilità di eventi (cenni sulle diverse interpretazioni).

2.Probabilità classica e calcolo combinatorio.

B. SPAZI DI PROBABILITÀ:

1.Proprietà assiomatiche delle probabilità, algebre e σ-algebre di eventi,
spazi di probabilità e conseguenze immediate degli assiomi.

2.Formula di inclusione ed esclusione (o di Poincaré).

3.Continuità delle Probabilità.

C. PROBABILITÀ CONDIZIONATE:

1.Definizione di Probabilità condizionata P(A|H) con P(H)> 0.

2.Conseguenze immediate della definizione: formula delle probabilità composte,
formula delle probabilità totali, formula di Bayes.

D. INDIPENDENZA di EVENTI:

1.Definizione di famiglia di eventi (globalmente) indipendenti
e definizione di eventi indipendenti a due a due.

2.Relazione con le probabilità condizionate.

E. VARIABILI ALEATORIE:

1.Definizione di Variabile Aleatoria.

2.Funzione di distribuzione (o di ripartizione) e sue proprietà caratterizzanti.

3.Variabili aleatorie discrete e densità discreta (o funzione di massa).

4.Variabili aleatorie (assolutamente) continue e densità di probabilità.

5.Valore Atteso (o Valore Medio o Speranza Matematica) e "code leggere"
(ovvero interpretazione geometrica del valore atteso). Momenti e Varianza.

F. VARIABILI ALEATORIE MULTIVARIATE (o vettori aleatori).
1.Distribuzione congiunta e Distribuzioni marginali.
2.Caso discreto: densità congiunta discreta, marginale e condizionata.
3.Caso (assolutamente) continuo: densità di probabilità congiunta,
marginale e condizionata.
4.Aspettazione condizionata e Formula del valore atteso della aspettazione condizionata.

G. INDIPENDENZA STOCASTICA PER VARIABILI ALEATORIE:
Definizione generale e caratterizzazioni nel caso discreto e (assolutamente) continuo.

H. TRASFORMAZIONI DI VARIABILI ALEATORIE:
1.Legge (o distribuzione) di una trasformazione di una variabile aleatoria discreta
2.Cambiamento della densità congiunta sotto trasformazioni biunivoche e
differenziabili, per variabili aleatorie (assolutamente) continue.
3.Conseguenze: Valore atteso di una trasformazione di una v.a.,
Proprietà di Linearità e Monotonia del Valore Atteso.
4.Covarianza, Varianza della somma di v.a. Indipendenza e non correlazione.
5.Disuguaglianza di Cauchy e coefficiente di correlazione.

I. CONVERGENZA:
1.Convergenza in probabilità e convergenza debole: definizioni e relazioni.
2.Disuguaglianza di Markov e di Chebyshev, Legge debole dei grandi numeri.
* 3.*Caso particolare delle prove ripetute: Legge delle medie e disuguaglianza di Berstein.*
4.Funzione caratteristica: definizione e proprietà elementari.
Connessioni con la convergenza debole (senza dimostrazioni).
5.Teorema Centrale del Limite (Linbdberg-Levy).
6.Approssimazione normale per la somma di variabili aleatorie indipendenti
identicamente distribuite.

* **L. CATENE DI MARKOV:**
Catene con spazio finito. Matrice delle probabilità di transizione e probabilità di transizione a piu' passi. Classificazione degli stati (transitori, ricorrenti, aperiodici) e classi. Catene irriducibili, aperiodiche, regolari. Passegiate aleatorie su Z. Misure di probabilità invarianti: esistenza, condizioni sufficienti per l'unicità. Enunciato del teorema ergodico.

MODELLI CLASSICI DELLA PROBABILITÀ:

1. Modelli di estrazione casuale da urna con e senza reimbussolamento, con palline di due o più colori. **Modelli di occupazione: Maxwell-Boltzmann, Fermi-Dirac, Bose-Einstein.*

2. Famiglie notevoli di variabili aleatorie. Discrete: Binomiali, ipergeometriche, di Poisson, geometriche, di Pascal(o binomiali negative), Uniformi. Continue: Uniformi, esponenziali, gamma, gaussiane, **chi-quadro*, di Cauchy, beta, **t di Student*. Multivariate: Multinomiale, **Gaussiane.*

* 3. *Problema della rovina del giocatore.*

* 4. *Trasformazioni lineari invertibili di vettori aleatori gaussiani (caso particolare: trasformazioni ortogonali di v.a. gaussiane indipendenti). Indipendenza tra media campionaria e varianza campionaria.*

* 5. *Trasformazione di Box-Muller per la simulazione di v.a. gaussiane indipendenti.*

* 6. *Statistiche ordinate per variabili aleatorie indipendenti identicamente distribuite: caso assolutamente continuo (caso particolare: distribuzione uniforme su (0,1))*

7. Approssimazione di Poisson.

8. Processo di Poisson (come limite di una passeggiata aleatoria)

9. Relazioni tra leggi geometriche ed esponenziali, proprietà di mancanza di memoria.

Riferimenti dettagliati

I testi Grimmett e Stirzaker (cap.1 cap.2, cap.3, cap.4 e cap.5) e Baldi (cap.1, cap.2 cap.3 e cap.4) forniscono una rapida base di partenza, che tuttavia va approfondita.
Per alcuni argomenti in particolare si consiglia:

A e B: Koch: cap.1. cap.2 e cap.3: §1.§2.§3.§4 App.I, Feller: vol.1; G.1.: Koch: Teorema 13.10 G.3.: Grimmett, Stirzaker: cap.2. §2 G.6.: Baldi: cap.4 §4

Modelli 1. Koch e Feller 2. qualsiasi testo 3. Grimmett e Stirzaker cap.1 §7 e cap 3 §9: esempio (6) 4. Grimmett e Stirzaker cap.4 §9 e §10 5. Koch: cap.9 §2 6. Grimmett e Stirzaker: esercizi cap.4 §11 n, 21, 22, 23. 7. Feller 8. e 9. appunti a cura della docente

Per quanto riguarda il testo Dall'Aglio si segnalano i seguenti argomenti:
ATTENZIONE: la lista non è completa ed è solamente la copia dei riferimenti per il corso di Probabilità della Laurea Triennale

Cap. I : tutto, TRANNE
nel paragrafo I.9, le definizioni di liminf e limsup e gli Esempi I.9.3. I.9.4 e I.9.5
nel paragrafo I.10, l'Osservazione I.1o.1
Cap. II : tutto, TRANNE
l'assioma 5, il Teorema II.3.2,
il Teorema II.3.3 (il cui enunciato va preso come assioma)
l'Esempio II.3.1
l'Esempio II.3.2
l'Osservazione II.3.2
l'Esempio II.4.5
il Teorema II.6.3
l'Esempio II.7.3
Va segnalato che tutti gli esempi (esclusi quelli citati sopra) del capitolo II possono essere letti e compresi.
Vanno segnalati in modo particolare (e SONO stati svolti gli ARGOMENTI contenuti in)
l'Esempio II.4.4 (Concordanze) Osservazione II.5.1 (estrazione in blocco e senza ripetizione)
Osservazione II.5.2 (Assiomatizzazione della probabilità condizionata)
Esempio II.7.4 (distribuzione Binomiale)
ATTENZIONE nel libro di Dall'Aglio Bin(n,p) e' sinonimo di Bernoulli di parametri n e p mentre in altri testi (ad esempio Baldi) Bernoulli significa Bin(1,p) cioe' la distribuzione di Bernoulli e' la distribuzione della funzione indicatrice di un evento
Esempio II.7.5 (distribuzione di Poisson)
Esempio II.7.6 (distribuzione ipergeometrica o estrazione in blocco)
Esempio II.7.13 (distribuzione multinomiale)
Cap. III.
Sono state svolte solo le parti relative alle variabili aleatorie discrete. Si consiglia la lettura di
III.1 (senza soffermarsi sulle nozioni di misurabilità e di classi di Borel)
III.2 : seconda metà di pagina 88,
Esempio III.2.2
Esempio III.2.3 (distribuzione geometrica)
Esempio III.2.4 (ritardi del lotto)
Esempi III.2.5, III.2.6, III.2.7
III.3 : Definizione di indipendenza (22)
La condizione necessaria e sufficiente (24)
La definizione di densità discreta condizionata (25)
Esempio III.3.1
Esempio III.3.3
Distribuzione della somma per v.a.indipendenti (32)
Esempio III.3.5
Esempio III.3.6 (fino alla formula (33))
Esempio III.4.7 (somma di due Binomiali Indipendenti)
Esempio III.4.14 (solo i casi (b) geometrica ed (e) Poisson)
Cap IV
IV.1 : saltare i riferimenti alle v.a. ass. cont.
Esempio IV.1.3 (strategia del raddoppio) NON svolto, ma se ne consiglia la lettura Esempio IV.1.4 (impossibilità dei sistemi) NON svolto, ma se ne consiglia la lettura
IV.2 : non e' in programma, ma se ne consiglia la lettura IV.3 : saltare i riferimenti alle v.a. ass. cont. e gli esempi TRANNE

si segnala che la dimostrazione della disuguaglianza di Cebicev (o meglio Chebyshev) va adattata al caso discreto
IV.4 : Definizione di v.a. correlate
saltare tutti gli esempi,
Definizioni di distribuzione condizionata e di media condizionata (31) nel caso discreto.
IV.5 : saltare tutto TRANNE Esempio IV.5.7 : distribuzione binomiale negativa (42), o di Pascal (41)
Cap. V
V.1 : pur NON essendo in programma, si segnala l' Esempio V.1.8 (approssimazione binomiale per l'estrazione in blocco)
V.2 : Definizione di convergenza in probabilità (9)
V.3 : saltare tutto
V.4 : tutto, incluse le funzioni generatrici, senza dimostrazioni in particolare vedere gli enunciati di
Teorema V.4.2 (di Bernoulli)
Teorema V.4.3 (di Poisson)
(Dimostrare direttamente che Pr(S(n)=k) converge alla densità di una v.a. di Poisson se n tende ad infinito e p(n) a zero, con np(n) costante)
V.5 : Teorema V.5.2 (Legge dei grandi numeri, di Cebicev)
V.6 : pur NON essendo in programma, si segnalano gli esempi
Esempio V.6.1 (passeggiata aleatoria semplice)
Esempio V.6.2 (rovina del giocatore)