PROGRAMMA DEL CORSO DI

CALCOLO DELLE PROBABILITA' (SECONDO MODULO)

docente: Giovanna Nappo,

(ufficio n.18, tel. 49913262, e-mail: nappo@mat.uniroma1.it)

periodo: II Semestre , A. A. 1998/99

Prerequisiti: Nozioni di base di Probabilita', acquisibili attraverso il corso di Calcolo delle Probabilita' (I modulo). In particolare si presuppone che lo studente conosca le nozioni di distribuzione congiunta e le distribuzioni classiche. E' inoltre consigliato avere familiarita' con i concetti di base di teoria della misura e con gli spazi L^p (tali nozioni sono acquisibili nel corso di Istituzioni di Analisi Superiore).

Obiettivi: Studio delle relazioni tra teoria della misura (misure finite) e modelli probabilistici. Studio delle possibili descrizioni e costruzioni per variabili aleatorie. Studio di alcuni tipi di convergenza per variabili aleatorie (quasi certa, in probabilita' e in distribuzione). Acquisizione delle tecniche fondamentali di convergenza e dei risultati fondamentali del Calcolo delle Probabilita' (Legge dei Grandi Numeri e Teorema Centrale del Limite)

TESTI CONSIGLIATI:

- **P. Billingsley**, Probability and Measure, Wiley 1984.
- **G. Koch**, La matematica del probabile, Aracne, 1997.

ALTRI TESTI CONSIGLIATI:

- **L. Breiman**, Probability, Addison Wesley, 1968;
- **Y.S. Chow, H. Teicher**, Probability Theory, Springer Verlag, 1988;
- **B. De Finetti**, Teoria delle Probabilita', Einaudi, 1970;
- **W. Feller**, An introduction to probability theory and its applications (Vol 1 e 2), Wiley & Sons, 1970

Programma:

A. **MISURE DI PROBABILITA'**:
σ-algebre di eventi, σ-additivita' e continuita' delle misure di probabilita'. sigma-algebre generate, λ-sistemi e π-sistemi di eventi, lemma $\pi - \lambda$ di Dynkin, limiti superiore ed inferiore per successioni di eventi. Indipendenza stocastica fra sigma-algebre, lemmi di Borel-Cantelli, sigma-algebra coda di una successione di eventi, Legge 0-1 di Kolmogoroff.
Misure di probabilita' sulla retta e in R^k, funzioni di distribuzione associate.
Assoluta continuita' tra misure, Teorema di Radon-Nykodim (dimostrazione facoltativa). Misure di probabilita' singolari sulla retta ed in R^k.
Decomposizione di Lebesgue di una misura di probabilita'.

B. **VARIABILI ALEATORIE (COME FUNZIONI MISURABILI)**:
σ-algebra generata da una funzione misurabile (e da un vettore aleatorio),

misura indotta da una funzione misurabile (e da un vettore aleatorio).
Misura di probabilita' indotta da una variabile aleatoria reale X (legge di una variabile aleatoria). Funzioni di distribuzione reali e spazi canonici: i reali R e i Boreliani di R con la misura indotta da X, lo spazio (0,1) con boreliani di (0,1) e la misura di Lebesgue ristretta a (0,1) e costruzione di Skorohod su (0,1).
Integrazione di funzioni misurabili. Valori attesi e proprieta' fondamentali. Cambiamento di variabile negli integrali. Trasformazioni di misura. Valori attesi di trasformazioni di variabili aleatorie.
Indipendenza stocastica per variabili aleatorie e misure prodotto, costruzione di una successione di variabili aleatorie indipendenti sullo spazio canonico (0,1). Applicazioni probabilistiche del Teorema di Fubini.
Legge 0-1 di Kolmogoroff per variabili aleatorie. Enunciati dei teoremi di convergenza monotona e dominata. Disuguaglianza di Markov. Diseguaglianze di Jensen, Holder, Young.

C. **CONVERGENZA PER SUCCESSIONI DI VARIABILI ALEATORIE**:
Definizioni di convergenza quasi certa, in probabilita' ed in legge (o in distribuzione) per successioni di variabili aleatorie. Relative proprieta' e relazioni. Convergenza debole per successioni di misure di probabilita', caratterizzazioni (Teoremi di Helly) e relazioni con la convergenza in legge. Teorema di Scheffe' (convergenza delle densita' di probabilita'). Successioni *tight* (trattenute o strette) di misure di probabilita' e Teorema di Prohorov. Uniforme integrabilita' e convergenza debole.

D. **FUNZIONI CARATTERISTICHE E TEOREMA CENTRALE DEL LIMITE**:
Definizione di funzione caratteristica di una distribuzione di probabilita' sulla retta e relative proprieta'. Teorema di Bochner (solo enunciato). Calcolo della funzione caratteristica in casi notevoli; distribuzioni simmetriche. Relazione tra funzione caratteristica e momenti della distribuzione. Cenno al problema dei momenti: controesempio della legge lognormale. Teorema di inversione e caso in cui la funzione caratteristica appartiene a $L^1(R)$ (e' integrabile sui reali rispetto alla misura di Lebesgue).
Teorema di continuita'. Teorema Centrale del Limite per successioni di variabili aleatorie indipendenti: Teorema di Lindeberg-Levy, Teorema di Lindeberg con discussione della condizione di Lindeberg (la generalizzazione al caso di insiemi triangolari e' facoltativa) Teorema di Lyapunov, Teorema di Berry-Esseen (solo enunciato).
Applicazioni del Teorema Centrale del Limite (approssimazione della legge della somma di variabili aleatorie indipendenti identicamente distribuite, relazione con la formula di Stirling)

E. **LEGGI FORTI DEI GRANDI NUMERI**:
Legge forte con esistenza del momento quarto (di Cantelli). Disuguaglianza di Kolmogoroff. Criterio sufficiente di Kolmogoroff per la legge forte. Legge forte per variabili aleatorie indipendenti identicamente distribuite con momento primo (Teorema di Kinchin).
Distribuzioni empiriche e Teorema di Glivenko-Cantelli (dimostrazione facoltativa).

Riferimenti dettagliati per gli argomenti in A e B:
[Billinsgley]:
1: The Unit Interval,
2: Spaces, Classes of Sets, Probability Measures,
3: Uniqueness and the $\lambda - \pi$ Theorem (si consiglia la lettura di tutto)
4: tutto,
5: se ne consiglia la lettura,
10, 11 e 12: i contenuti si considerano noti, e se ne consiglia la lettura,
20: Random variables and Vectors, Subfields, Distributions, Independence, Sequences of Random Variables, Convolution,
21: Expected Values and Distributions, Moments, Inequalities, Independence and Expected Values,
22: Kolmogorov's 0-1 law.

[Koch]:
Cap. 4, appendice II,
Cap 5: 5.1, 5.2 e 5.3 (si consiglia la lettura anche dei rimanenti paragrafi),
Cap. 6: Teorema 6.87,
Cap. 8: 8.1 e 8.2 (si consiglia la lettura di 8.3),
Cap. 9: 9.1 e 9.2,
Cap 13: 13.2.
(per il Teorema di Radon-Nykodim: vedere ad esempio
Tesei, Istituzioni di Analisi Superiore, Boringhieri)

Riferimenti dettagliati per gli argomenti in C, D ed E:
[Billinsgsley]:
20: Convergence in Probability, The Glivenko-Cantelli Theorem,
22: Kolmogorov's Inequality, The strong Law of Large Numbers,
25: tutto,
26: tutto,
27: Identically Distributed Summands, The Lindeberg and Lyapunov Theorems.
[Koch]:
Cap 11,
Cap 12: 12.1, 12.2.,
Cap 13: 13.1 (fino a pag. 503), Prop. 13.34, 13.3 (in particolare
Teoremi 13.49, 13.50, 13.51, 13.52, 13.59, 13.60)