GEOMETRIA DIFFERENZIALE

Forme differenziali su aperti di $\mathbb{R}^n$

Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto. Una p-forma differenziale su A è una espressione

$$\alpha = \sum \alpha_{i_1,i_2,..,i_p}(x)\, dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge .. \wedge dx_{i_p}, \quad 1 \leq i_1,..,i_p \leq n$$

dove ciascun $\alpha_{i_1,..,i_p}$ è una funzione con dominio A.

La p-forma è continua se ciascuna funzione $\alpha_{i_1,..,i_p}$ è continua, è C^∞ se ciascuna $\alpha_{i_1,..,i_p}$ è C^∞.

Daremo un significato all'espressione $dx_{i_1} \wedge .. \wedge dx_{i_p}$: per il momento va preso come un simbolo, e si impongono le uguaglianze

(I) $\qquad dx_{i_1} \wedge .. \wedge dx_{i_p} = 0$ se uno degli indici è ripetuto

(II) $\qquad dx_{i_1} \wedge .. \wedge dx_{i_p} = \varepsilon(\sigma)\, dx_{j_1} \wedge .. \wedge dx_{j_p}$ se la stringa $j_1,..,j_p$ è ottenuta dalla string $i_1,..,i_p$ attraverso la permutazione σ, e $\varepsilon(\sigma)$ è il segno di σ (+1 se σ è pari, −1 se σ è dispari).

Quindi ogni p-forma si può scrivere come

$$\alpha = \sum_{i_1<i_2<..<i_p} \alpha_{i_1,..,i_p}(x)\, dx_{i_1} \wedge .. \wedge dx_{i_p} \qquad (*)$$

Non imponiamo altre uguaglianze, perciò l'espressione (*) è unica. La somma di p-forme si definisce componente per componente, e analogamente si definisce la moltiplicazione di una p-forma per uno "scalare" $c \in \mathbb{R}$. Con queste operazioni l'insieme delle p-forme su A è uno spazio vettoriale reale.

GEOMETRIA DIFFERENZIALE

A noi interesseranno prevalentemente le forme differenziali C^∞, e denoteremo con $\Omega^p(A)$ l'insieme delle p-forme C^∞ su A. È chiaro che $\Omega^p(A)$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale delle p-forme su A.

ESEMPI

$A = \mathbb{R}$ $\qquad \Omega^0(\mathbb{R}) = C^\infty(\mathbb{R}) \qquad \Omega^1(\mathbb{R}) = \{ f(x)dx \mid f \in C^\infty(\mathbb{R}) \}$

Notate che $\Omega^p(\mathbb{R}) = \{0\}$ se $p > 1$ perchè $\underbrace{dx \wedge dx \wedge \dots \wedge dx}_{p>1} = 0$.

Analogamente, se $A \subset \mathbb{R}^n$ è un aperto,

$$\Omega^p(A) = \{0\} \quad \text{se} \quad p > n.$$

$A = \mathbb{R}^2$ $\qquad \Omega^0(\mathbb{R}^2) = C^\infty(\mathbb{R}^2) \qquad \Omega^1(\mathbb{R}^2) = \{ f(x,y)dx + g(x,y)dy \mid f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^2) \}$

$\Omega^2(\mathbb{R}^2) = \{ h(x,y)\, dx \wedge dy \mid h \in C^\infty(\mathbb{R}^2) \}$

$A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ $\qquad \alpha := \dfrac{x}{x^2+y^2}dy - \dfrac{y}{x^2+y^2}dx \qquad \alpha \in \Omega^1(A)$

GEOMETRIA DIFFERENZIALE

Che senso dare a una p-forma differenziale?

Siano $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto, e $\alpha \in \Omega^n(A)$ (una n-forma differenziale C^∞).
Quindi

$$\alpha = f(x_1, .., x_n)\, dx_1 \wedge .. \wedge dx_n \qquad f \in C^\infty(A).$$

Se $K \subset A$ è un compatto, possiamo integrare α su K:

$$\langle \alpha, K \rangle := \int_K f(x_1, .., x_n)\, dx_1 \wedge .. \wedge dx_n$$

Esempio: $A = \mathbb{R}^2$ $\quad \alpha = dx_1 \wedge dx_2 \quad K = I^2$, dove $I = [0,1]$

$$\langle dx_1 \wedge dx_2, I^2 \rangle = \int_{I^2} dx_1 \wedge dx_2 = 1$$

Ora integriamo $\beta = dx_2 \wedge dx_1$ su I^2: per farlo, prima scriviamo $\beta = -dx_1 \wedge dx_2$, e otteniamo

$$\langle dx_2 \wedge dx_1, I^2 \rangle = \int_{I^2} -dx_1 \wedge dx_2 = -1.$$

Dato $K \subset A$ compatto, abbiamo una funzione $\mathbb{R}$-lineare

$$\begin{aligned} \Omega^n(A) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \alpha &\longmapsto \langle \alpha, K \rangle. \end{aligned}$$

Ora siano $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto e $\alpha \in \Omega^p(A)$. Si può dare senso all'integrale di α su una sottovarietà compatta di A di dimensione p (orientata). Per farlo introduciamo alcune operazioni.

Moltiplicazione esterna Definiamo

$$\Omega^p(A) \times \Omega^q(A) \to \Omega^{p+q}(A)$$

ponendo $(dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}) \wedge (dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_q}) := dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_q}$

e definendo

$$\left(\sum_I \alpha_I \, dx_I\right) \wedge \left(\sum_J \beta_J \, dx_J\right) := \sum \alpha_I \cdot \beta_J \, dx_I \wedge dx_J .$$

Notate che, a priori, la definizione potrebbe essere mal posta, perchè abbiamo imposto

$$dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} = \varepsilon(\sigma) \, dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_p}$$ se $j_1, \dots, j_p$ è ottenuta da $i_1, \dots, i_p$ operando con la permutazione σ.

La definizione è ben posta perchè la funzione ε è moltiplicativa.

Osservazione Siano $\alpha \in \Omega^p(A)$ e $\beta \in \Omega^q(A)$. Allora

$$\beta \wedge \alpha = (-1)^{pq} \alpha \wedge \beta .$$

Sia

$$\Omega^*(A) := \bigoplus_p \Omega^p(A).$$

Con le operazioni di somma e prodotto esterno, $\Omega^*(A)$ è una $\mathbb{R}$-algebra (non commutativa se $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^n$ con $n \geq 2$) graduata.

<u>Pull-back</u> Siano $A \subset \mathbb{R}^n$ e $B \subset \mathbb{R}^m$ aperti, e

$$\begin{aligned} A &\xrightarrow{\phi} B \\ x &\longmapsto (\phi_1(x), \ldots, \phi_m(x)) \end{aligned}$$

un'applicazione C^∞, cioè ciascuna ϕ_i è C^∞.

Definiamo un'applicazione

$$\Omega^*(B) \xrightarrow{\phi^*} \Omega^*(A)$$

procedendo nel seguente modo.

(1) Se $f \in \Omega^0(B) = C^\infty(B)$, $\quad \phi^*(f) := f \circ \phi$ (<u>composizione</u>)

(2) Siano $(y_1, \ldots, y_m)$ le coordinate su $\mathbb{R}^m$, e dy_i la corrispondente 1-forma su B $\left(dy_i \in \Omega^1(B) \right)$: poniamo

$$\phi^*(dy_i) := \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \phi_i(x)}{\partial x_j} dx_j \in \Omega^1(A)$$

(3) Data $\alpha \in \Omega^p(B)$, scriviamo

$$\alpha = \sum \alpha_{i_1, \ldots, i_p} dy_{i_1} \wedge \ldots \wedge dy_{i_p},$$

e poniamo

$$\phi^*(\alpha) := \sum \phi^*(\alpha_{i_1, \ldots, i_p}) \, \phi^*(dy_{i_1}) \wedge \phi^*(dy_{i_2}) \wedge \ldots \wedge \phi^*(dy_{i_p}).$$

Segue dalla definizione che ϕ^* è lineare, ed è un <u>omomorfismo</u> di <u>algebre graduate</u>:

$$\phi^*(\alpha+\beta) = \phi^*(\alpha) + \phi^*(\beta) \qquad \phi^*(\alpha \wedge \beta) = \phi^*(\alpha) \wedge \phi^*(\beta)$$

$$\Omega^p(B) \xrightarrow{\phi^*} \Omega^p(A).$$

ESEMPIO Siano $A, B \subset \mathbb{R}^n$ aperti e

$$A \xrightarrow{\phi} B$$
$$X \longmapsto (\phi_1(X), \dots, \phi_n(X))$$

Se $\omega = f(y_1, \dots, y_n) dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n \in \Omega^n(B)$, allora

$$\phi^*(\omega) = (f \circ \phi) \cdot \mathrm{Det}(J\phi(X)) \, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n,$$

dove $J\phi(X)$ è lo Jacobiano di ϕ in X, cioè la matrice $n \times n$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1}(X) & \dots & \frac{\partial \phi_1}{\partial x_n}(X) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \phi_n}{\partial x_1}(X) & \dots & \frac{\partial \phi_n}{\partial x_n}(X) \end{bmatrix}$$

Ora definiamo l'integrale di una p-forma $\alpha \in \Omega^p(A)$ su una sottovarietà di di dimensione p di A. Prima una

Definizione Sia $Z \subset \mathbb{R}^p$. Un'applicazione

$$Z \xrightarrow{\phi} A \qquad \text{dove } A \subset \mathbb{R}^n \text{ è aperto}$$

è C^∞ se esistono un aperto $U \subset \mathbb{R}^p$ contenente Z e un'applicazione C^∞ $\tilde{\phi}: U \to \mathbb{R}^n$ tale che $\tilde{\phi}|_Z = \phi$.

Sia $K \subset \mathbb{R}^p$ un compatto, e sia

$$K \xrightarrow{\phi} A \qquad \text{dove } A \subset \mathbb{R}^n \text{ è aperto}$$

un'applicazione C^∞. Data $\alpha \in \Omega^p(A)$, ha senso $\tilde{\phi}^*(\alpha) \in \Omega^p(U)$, dove

$\tilde{\phi}$ e U sono come nella definizione, e quindi possiamo considerare l'integrale

$$\int_K \tilde{\phi}^*(\alpha)$$

È chiaro che il valore dell'integrale non dipende dalla scelta di U e $\tilde{\phi}$. È vero molto di più. Infatti supponiamo di considerare un'altra applicazione $\psi : Z \to A$, ottenuta così:

$\psi = \phi \circ \xi$, dove $\xi : Z \to Z$ è C^∞ ed esiste una $\eta : Z \to Z$ C^∞,

tale che:

(1) $\eta \circ \xi = Id_Z$ e $\xi \circ \eta = Id_Z$

(2) Il determinante Jacobiano $\operatorname{Det} J\xi(x)$ è strettamente positivo per ogni $x \in Z$.

Allora

$$\int_K \tilde{\phi}^*(\alpha) = \int_K \tilde{\psi}^*(\alpha). \qquad (*)$$

Prima di dimostrare $(*)$, osserviamo che, date applicazioni C^∞

$$\underset{\substack{\cap \\ \mathbb{R}^n}}{\overset{}{A}} \xrightarrow{f} \underset{\substack{\cap \\ \mathbb{R}^m}}{B} \xrightarrow{g} \underset{\substack{\cap \\ \mathbb{R}^p}}{C}$$

(aperto, aperto, aperto)

si ha $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$. (Segue dalla regola per la differenziazione della composizione di funzioni.)

Ora siano $U, V \subset \mathbb{R}^p$ aperti contenenti Z e $\tilde{\xi}: U \to V$ una applicazione C^∞ tale che $\tilde{\xi}|_Z = \xi$. Va verificato che

$$\int_K \tilde{\phi}^*(\alpha) = \int_K (\tilde{\phi} \circ \tilde{\xi})^*(\alpha) = \int_K \tilde{\xi}^*(\tilde{\phi}^*(\alpha)).$$

Poniamo $\tilde{\phi}^*(\alpha) = f(x)\, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_p$. Va dimostrato che

$$\int_K f(x)\, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_p = \int_K \tilde{\xi}^*(f(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_p) = \int_K f(\tilde{\xi}) \cdot \operatorname{Det} J\tilde{\xi}(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_p.$$

L'uguaglianza vale per la formula di integrazione per sostituzione. (Attenzione: si applica perché abbiamo supposto che $\operatorname{Det} J\tilde{\xi}(x) > 0$ per ogni $x \in K$.) In sostanza l'integrale

$$\int_K \tilde{\phi}^*(\alpha)$$

dipende solo dall'immagine $C := \phi(K)$ e dall'orientazione di $\phi(K)$. (Torneremo su questo punto). Informalmente lo denotiamo

$$\int_{[C]} \alpha$$

dove $[C]$ significa che C è stato "orientato".

GEOMETRIA DIFFERENZIALE

ESEMPI (1) Sia $\alpha \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$ data da $\alpha = x\,dx + y\,dy$. Sia

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (x(t), y(t)) \end{array} \qquad C^\infty.$$

Allora $\phi^*(\alpha) = (x(t)x'(t) + y(t)y'(t))dt = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(x(t)^2 + y(t)^2)dt$.

Ora sia $K = [a,b] \subset \mathbb{R}$ e $C = \phi(K)$. Allora, per definizione

$$\int_{[C]} \alpha = \int_K \phi^*(\alpha) = \int_a^b \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(x(t)^2 + y(t)^2)\,dt = \frac{1}{2}\Big[x(t)^2 + y(t)^2\Big]_{t=a}^{t=b}.$$

(2) Sia $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ e $\alpha = \frac{x}{x^2+y^2}dy - \frac{y}{x^2+y^2}dx$ (vedi p. 2).

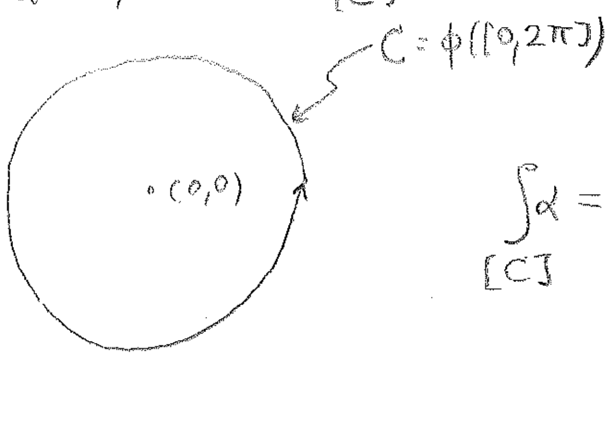
Sia

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{\phi} & A \\ \theta & \longmapsto & (\cos\theta, \sin\theta) \end{array}$$

Allora $\phi^*(\alpha) = d\theta$. Se $K = [a,b] \subset \mathbb{R}$, e $C = \phi(K)$, allora

$$\int_{[C]} \alpha = \int_K \phi^* \alpha = \int_a^b \theta = b - a.$$

Per esempio, se $a = 0$, $b = 2\pi$, $\int_{[C]} \alpha = 2\pi$.



$$\int_{[C]} \alpha = 2\pi.$$

GEOMETRIA DIFFERENZIALE

Il differenziale Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto. Definiamo l'operatore

$$\Omega^p(A) \xrightarrow{d} \Omega^{p+1}(A)$$

così: per $p=0$,

$$df := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \qquad f \in \Omega^0(A),$$

e per p arbitrario

$$d\left(\sum_I \alpha_I dx_I\right) := \sum_I \frac{\partial \alpha_I}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_I .$$

PROPRIETA' DEL DIFFERENZIALE

(1) d è $\mathbb{R}$-lineare

(2) Se $\alpha \in \Omega^p(A)$ e $\beta \in \Omega^q(A)$, allora

$$d(\alpha \wedge \beta) = (d\alpha) \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta .$$

(3) $d \circ d = 0$, cioè $d(d\alpha) = 0$.

---

(1), (2) e (3) si verificano facilmente. In particolare (3) equivale all'uguaglianza delle derivate parziali miste.

Quale è il significato del differenziale?
Se $f \in \Omega^0(A)$, è chiaro il significato di df.
Un risultato che dà significato a $d\omega$ per $\omega \in \Omega^p(A)$ è il TEOREMA DI STOKES. Qui non diamo un enunciato preciso del Teorema, ci accontentiamo della seguente versione. Siano $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto e $\omega \in \Omega^{n-1}(A)$. Sia $R \subset A$ un compatto con frontiera "ragionevole" ∂R; allora

$$\int_R d\omega = \int_{\partial R} \omega. \qquad (*)$$

L'equazione $(*)$ è imprecisa perchè non abbiamo specificato cosa sia ∂R, cioè non è chiaro cosa sia $\int_{\partial R} \omega$: il punto è che si deve <u>orientare</u> ∂R.

Nel seguito daremo una versione precisa del Teorema di Stokes.
Notiamo che se $n=1$, allora il Teorema di Stokes si riduce al Teorema Fondamentale del Calcolo.

GEOMETRIA DIFFERENZIALE

Sia $A \subset \mathbb{R}^n$. Il differenziale ci permette di associare ad A una $\mathbb{R}$-algebra nel modo seguente.

<u>DEF</u> Il p-esimo gruppo di De Rham di A è il quoziente

$$H^p_{DR}(A) := \{\omega \in \Omega^p(A) \mid d\omega = 0\} \Big/ \{d\varphi \mid \varphi \in \Omega^{p-1}(A)\}.$$

<u>Osservazioni</u> (1) Siccome il differenziale è $\mathbb{R}$-lineare, sia $\{\omega \in \Omega^p(A) \mid d\omega = 0\}$ che $\{d\varphi \mid \varphi \in \Omega^{p-1}(A)\}$ sono sottospazi vettoriali di $\Omega^p(A)$.

(2) $\{d\varphi \mid \varphi \in \Omega^{p-1}(A)\} \subset \{\omega \in \Omega^p(A) \mid d\omega = 0\}$ perchè $d \circ d = 0$.

Da (1) e (2) segue che $H^p_{DR}(A)$ è un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale.

Siano $[\omega] \in H^p_{DR}(A)$ e $[\tau] \in H^q_{DR}(A)$. Allora

$$d(\omega \wedge \tau) = d\omega \wedge \tau + (-1)^p \omega \wedge d\tau = 0.$$

Inoltre, se $\varphi \in \Omega^{p-1}(A)$, $\psi \in \Omega^{q-1}(A)$

$$d\varphi \wedge \tau = d(\varphi \wedge \tau) \qquad \omega \wedge d\psi = (-1)^p d(\omega \wedge \psi) = d((-1)^p \omega \wedge \psi).$$

Questo dimostra che possiamo dare alla somma diretta

$$H^*_{DR}(A) = \bigoplus_p H^p_{DR}(A)$$

una struttura di anello ponendo $[\omega] \wedge [\tau] := [\omega \wedge \tau]$.

GEOMETRIA DIFFERENZIALE

$A \subset \mathbb{R}^n$ aperto.

TERMINOLOGIA Una $\alpha \in \Omega^*(A)$ è chiusa se $d\alpha = 0$, ed è esatta se esiste $\varphi \in \Omega^0(A)$ t.c. $\alpha = d\varphi$.

Quindi, una forma esatta è chiusa, e $H^*_{DR}(A)$ è il quoziente dello spazio vettoriale delle forme chiuse modulo il sottospazio delle forme esatte.

Una forma $\alpha = \sum_p \alpha_p$, dove $\alpha_p \in \Omega^p(A)$, è chiusa (o esatta) se e solo se ciascuna α_p è chiusa (o esatta), e per questo

$H^*_{DR}(A) = \bigoplus_p H^p_{DR}(A)$.

ESEMPIO $H^0_{DR}(A)$. Un elemento di $H^0_{DR}(A)$ è rappresentato da una $f \in \Omega^0(A)$ t.c. $df = 0$. Però non c'è da quozientare, quindi

$$H^0_{DR}(A) = \{ f \in \Omega^0(A) \mid df = 0 \}.$$

Ora $df = 0$ se e solo se f è costante su ciascuna componente connessa di A, e perciò

$$H^0_{DR}(A) \cong \prod_{\substack{C \subset A \\ C \text{ comp. connessa}}} \mathbb{R} = \text{insieme i cui elementi sono le applicazioni } \{\text{comp. conn. di } A\} \xrightarrow{h} \mathbb{R}.$$

Proprietà funtoriali di H^*_{DR}

Siano $A \subset \mathbb{R}^n$ e $B \subset \mathbb{R}^m$ aperti, e

$$A \xrightarrow{f} B \quad , \quad C^\infty.$$

Sia $\omega \in \Omega^p(B)$ chiusa. Allora

$$d(f^*\omega) = f^*(d\omega) = f^*(0) = 0,$$ cioè $\underline{f^*\omega \text{ è chiusa}}$.

Se $\omega \in \Omega^p(B)$ è esatta, cioè $\omega = d\varphi$ dove $\varphi \in \Omega^{p-1}(B)$, allora

$$f^*(\omega) = f^*(d\varphi) = d(f^*\varphi)$$

e quindi $\underline{f^*(\omega) \text{ è esatta}}$. Segue che possiamo definire il pull-back

$$\begin{aligned} H^p_{DR}(B) &\xrightarrow{f^*} H^p_{DR}(A) \\ [\omega] &\longmapsto [f^*\omega]. \end{aligned}$$

Quindi abbiamo anche

$$H^*_{DR}(B) \xrightarrow{f^*} H^*_{DR}(A)$$

Si verifica (fatelo!) che f^* è un omomorfismo di <u>anelli</u> graduati.

$A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^m$ aperti

__DEF__ Una $f: A \to B$ C^∞ è un __diffeomorfismo__ se esiste $g: B \to A$ C^∞ tale che

$$g \circ f = Id_A \qquad f \circ g = Id_B \qquad (\bigstar)$$

__OSS.__ Id_A è un diffeomorfismo. Se $f: A \to B$ e $g: B \to C$ sono diffeomorfismi, allora $g \circ f: A \to C$ è un diffeomorfismo.
Se $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$ e $f: A \to B$ è un diffeomorfismo, allora $m = n$. (Considerato $a \in A$ $b = f(a)$ e le matrici $Jf(a)$ e $Jg(b)$.)

__PROP__ Se $f: A \to B$ è un diffeomorfismo, allora

$$f^*: H^*_{DR}(B) \longrightarrow H^*_{DR}(A)$$

è un __isomorfismo__ di __anelli__ graduati.

__DIM__ Sia $g: B \to A$ C^∞ t.c. valga $(\bigstar)$. Allora

$$Id_{H^*_{DR}(A)} = Id_A^* = (g \circ f)^* = f^* \circ g^*$$

$$Id_{H^*_{DR}(B)} = Id_B^* = (f \circ g)^* = g^* \circ f^*$$

Quindi g^* è un omomorfismo di anelli inverso bilatero di f^*.

$\square$

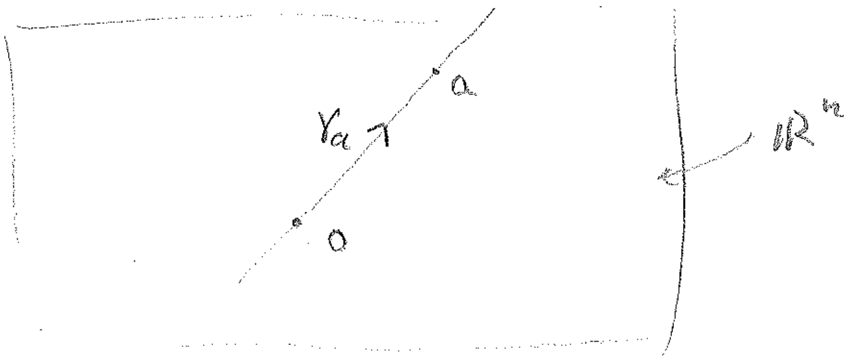
GEOMETRIA DIFFERENZIALE

$\sum_{i=1}^{n} \omega_i(x) dx_i$

$\|$

ESEMPI

(1) $H^1_{DR}(\mathbb{R}^n) = \{0\}$. Equivale all'affermazione seguente: se $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^n)$ è chiusa (cioè $d\omega = 0$) allora esiste $f \in \Omega^0(\mathbb{R}^n)$ t.c. $df = \omega$. Una tale f si può definire così:



Dato $a \in \mathbb{R}^n$, sia

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{\gamma_a} & \mathbb{R}^n \\ t & \longmapsto & t \cdot a \end{array}$$

Definiamo

$$f(a) := \int_0^1 \gamma_a^*(\omega) = \sum_{i=1}^{n} a_i \int_0^1 \omega_i(at)\,dt.$$

Si dimostra, usando Stokes, che $df = \omega$.

(2) $H^1_{DR}(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}) \neq \{0\}$. Infatti, sia $\alpha \in \Omega^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$ definita da

$$\alpha := \frac{x}{x^2+y^2}dy - \frac{y}{x^2+y^2}dx \qquad \text{(vedi p. 2).}$$

Allora $d\alpha = 0$, quindi α rappresenta una classe in $H^1_{DR}(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$. Dimostriamo che $[\alpha] \neq 0$, cioè <u>non</u> esiste $f \in \Omega^0(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$ t.c. $df = \alpha$. Supponiamo che una tale f esista, e si consideri

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{\phi} & (\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}) \\ \theta & \longmapsto & (\cos\theta, \sin\theta) \end{array} \qquad \text{(vedi p. 9).}$$

Allora $\int_0^{2\pi} \phi^*(\alpha) = \int_0^{2\pi} \phi^*(d\beta) = \int_0^{2\pi} d(\phi^*(\beta)) = \int_0^{2\pi} d(f\circ\varphi) = \int_0^{2\pi} \frac{d}{d\theta} f(\phi(\theta)) =$

$= f(\phi(2\pi)) - f(\phi(0)) = f(1,0) - f(1,0) = 0.$

Ma $\int_0^{2\pi} \phi^*(\alpha) = \int_0^{2\pi} \theta = 2\pi \neq 0$! Quindi α non è esatta.

(Il punto è che l'integrale di una 1-forma esatta su un cammino chiuso è nullo.)

Siccome $H^1_{DR}(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}) \neq \{0\}$ e $H^1_{DR}(\mathbb{R}^2) \neq \{0\}$, concludiamo che $(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$ non è diffeomorfo a $\mathbb{R}^2$.