GEOMETRIA DIFFERENZIALE

Riassunto della lezione del 24/10/2016:

V spazio vettoriale $/k$.

$T(V) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} V^{\otimes n}$, dove $V^{\otimes n} := \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{n}$

$T(V)$ è un anello graduato.

Somma: è la somma, componente per componente, in $V^{\otimes n}$.

Prodotto: c'è un isomorfismo canonico

$$(V^{\otimes m}) \otimes (V^{\otimes n}) \xrightarrow{\sim} V^{\otimes (m+n)}$$

$$(u_1 \otimes \cdots \otimes u_m) \otimes (w_1 \otimes \cdots \otimes w_n) \longmapsto u_1 \otimes \cdots \otimes u_m \otimes w_1 \otimes \cdots \otimes w_n$$

che definisce il prodotto di $\alpha \in V^{\otimes m}$ per $\beta \in V^{\otimes n}$, che denotiamo $\alpha \otimes \beta$.

Ora, dati $\alpha = \sum_i \alpha_i$, $\beta = \sum_j \beta_j$, con $\alpha_i \in V^{\otimes i}$ $\beta_j \in V^{\otimes j}$,

definiamo

$$\alpha \otimes \beta := \sum_{i,j} \alpha_i \otimes \beta_j .$$

"Graduato": l'addendo di grado m di $T(V)$ è $V^{\otimes m}$,

e "anello graduato" si riferisce al fatto che

- la somma di $\alpha, \beta \in V^{\otimes m}$ è in $V^{\otimes m}$
- se $\alpha \in V^{\otimes m}$, $\beta \in V^{\otimes n}$, allora $\alpha \otimes \beta \in V^{\otimes (m+n)}$

Con queste operazioni $T(V)$ è un anello <u>non commutativo</u> (a meno che $\dim V \leq 1$). Infatti, se $v, w \in V$ sono linearmente indipendenti, $a \otimes b \neq b \otimes a$.

$T(V)$ è <u>l'algebra tensoriale</u> associata a V.

Ora definiamo <u>l'algebra esterna</u> associata a V: sia $I \subset T(V)$ l'ideale (bilatero! $T(V)$ <u>non</u> è commutativo) generato da tutti gli elementi

$$v \otimes v \qquad v \in V,$$

e sia

$\Lambda^\circ(V) := T(V)/I$: Questa è l'algebra esterna associata a V. $\Lambda^m(V) = \mathrm{Im}\left(V^{\otimes m} \longrightarrow \Lambda^\circ(V)\right)$.

Denotiamo con "$\wedge$" il prodotto su $\Lambda^\circ(V)$

Si dimostra:

(1) $\Lambda^\circ(V) = \bigoplus_m \Lambda^m(V)$, è un anello graduato.

(2) Siano $v_1, \ldots, v_m \in V$, e $\sigma \in S_m$ una permutazione di $1, \ldots, m$. Allora

$$v_{\sigma(1)} \wedge \ldots \wedge v_{\sigma(m)} = \mathrm{sign}(\sigma)\, v_1 \wedge \ldots \wedge v_m.$$

(3) $\Lambda^m(V) = \{0\}$, se $m \notin \{0, \ldots, \dim V\}$, e, se $m \in \{0, \ldots, \overset{n}{\overset{\shortparallel}{\dim V}}\}$, data una base $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$, una base di $\Lambda^m(V)$ è data da

$$\Lambda^m \mathcal{B} := \{\ldots, v_{i_1} \wedge \ldots \wedge v_{i_m}, \ldots\}_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_m \leq n}.$$

$A \subset \mathbb{R}^n$ aperto

GEOMETRIA DIFFERENZIALE

Ora poniamo dare un significato a una p-forma differenziale $\omega \in \Omega^p(A)$. Sia

$$\omega = \sum_I \omega_I \, dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} \qquad \omega_I \in C^\infty(A).$$

Dato $a \in A$, ha senso

$$\omega(a) := \sum_I \omega_I(a) \, dx_{i_1}(a) \wedge \dots \wedge dx_{i_p}(a) \in \Lambda^p \Omega_a(A).$$