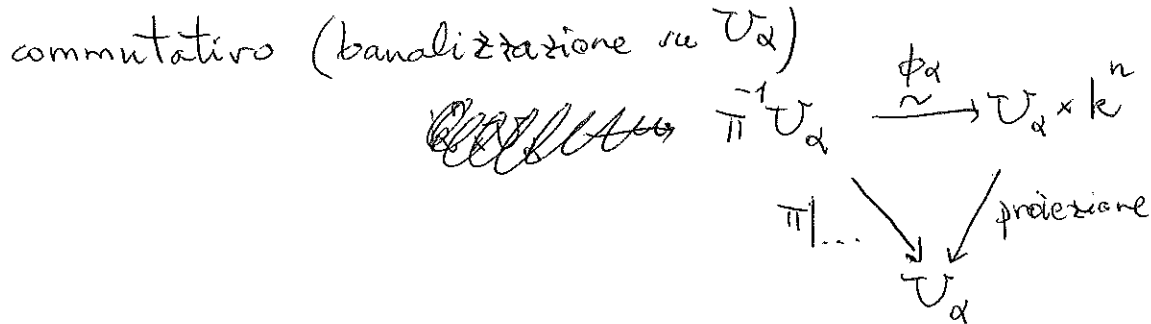


Fibrati vettoriali.

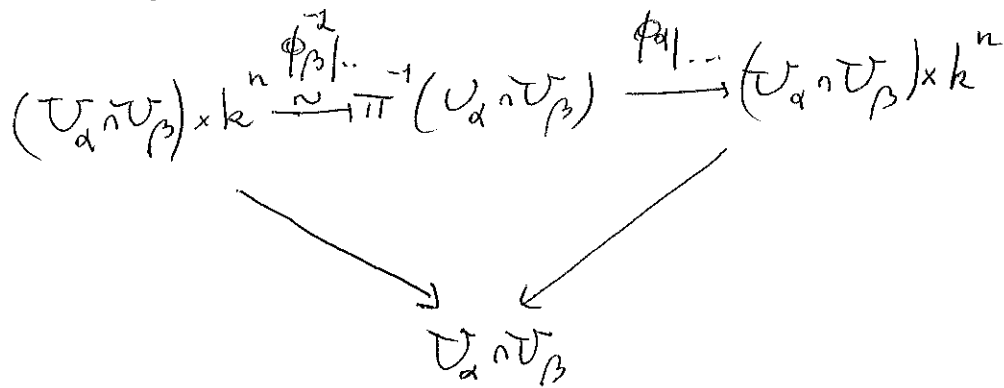
$$k = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{oppure} \\ \mathbb{C} \end{cases}$$

Dato un k^n -fibrato $\begin{matrix} E \\ \pi \downarrow \\ M \end{matrix}$ esiste un

ricoprimento aperto $M = \bigcup_{\alpha} U_{\alpha}$ tale che si abbia un diagramma



Ricordiamo che sull'intersezione $U_{\alpha} \cap U_{\beta}$, la composizione



è data da

$$(\phi_{\alpha} \circ \phi_{\beta}^{-1})(p, v) = (p, g_{\alpha\beta}(p)(v)),$$

dove

$$U_{\alpha} \cap U_{\beta} \xrightarrow{g_{\alpha\beta}} GL_n(k) \quad (*)$$

è un'applicazione C^{∞} , detta funzione di transizione.

Si ha l'equazione (su $U_{\alpha} \cap U_{\beta} \cap U_{\gamma}$)

$$g_{\alpha\beta} \circ g_{\beta\gamma} = g_{\alpha\gamma} \quad (**)$$

Fibrati vettoriali

Viceversa se per ogni α, β (ordinati) ho un'applicazione C^∞ come in (*), e vale l'equazione (***) per ogni α, β, γ , allora esiste un k^n -fibrato E con funzioni di Transizione (*)

$$\begin{array}{c} E \\ \pi \downarrow \\ M \end{array}$$

Esempio Sia $L \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}_k^n$ il fibrato tautologico, cioè

$L \subset \mathbb{P}_k^n \times k^{n+1}$ è dato da

$$L := \{(l, v) \mid v \in l\}.$$

Sia $U_i \subset \mathbb{P}_k^n$ l'aperto affine standard

$$U_i := \{[X] \mid x_i \neq 0\}.$$

Abbiamo la banalizzazione su U_i

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}U_i & \xrightarrow{\phi_i} & U_i \times k \\ ([X], tX) & \longmapsto & ([X], tX_i) \end{array}$$

con inversa

$$\begin{array}{ccc} U_i \times k & \xrightarrow{\phi_i^{-1}} & \pi^{-1}U_i \\ ([X], s) & \longmapsto & ([X], \frac{s}{x_i} \cdot X) \end{array}$$

Ne segue che la funzione di transizione g_{ij} è data da

$$g_{ij}([X]) = \frac{x_i}{x_j} \quad (\text{Ricordate: } g_{ij}: U_i \cap U_j \rightarrow k^*)$$

k \setminus \{0\}

Terminologia:
Una collezione $\{g_{\alpha\beta}\}$ di funzioni come in (*) è un cociclo se vale l'eq. ne (***) per ogni α, β, γ

Fibrati vettoriali

Ora supponiamo che E e F siano due fibrati vettoriali,

$$\begin{array}{ccc} E & & F \\ \pi \downarrow & \searrow & \downarrow \rho \\ & M & \end{array}$$
 $\text{rg} E = m$ $\text{rg} F = n$.

e che entrambi siano banalizzati sugli aperti del ricoprimento

$$M = \bigcup_{\alpha} U_{\alpha}$$

Siano $\{g_{\alpha\beta}\}$ e $\{h_{\alpha\beta}\}$ le funzioni di transizione di E e F rispettivamente: $g_{\alpha\beta}(p) \in GL_m(k)$ $h_{\alpha\beta}(p) \in GL_n(k)$ $\forall p \in U_{\alpha} \cap U_{\beta}$

Allora

$$\gamma_{\alpha\beta}(p) = \begin{pmatrix} \underbrace{g_{\alpha\beta}(p)}_m & \underbrace{0}_n \\ \underbrace{0}_m & \underbrace{h_{\alpha\beta}(p)}_n \end{pmatrix} \in GL_{m+n}(k)$$

e $\{\gamma_{\alpha\beta}\}$ è un cociclo. Quindi esiste un fibrato vettoriale su M un cociclo $\{\gamma_{\alpha\beta}\}$. La fibra di questo fibrato vettoriale su $p \in M$ è in modo naturale la forma diretta $E_p \oplus F_p$, e quindi lo denotiamo

$$E \oplus F.$$

In modo analogo possiamo definire i fibrati vettoriali

$$E \otimes F, \quad E^{\vee},$$

con fibre su p identificate con $E_p \otimes F_p$ e E_p^{\vee} rispettivamente. [3]

Un'altra importante costruzione è il fibrato quoziente.

① Siano E F fibrati vettoriali/ k .
 (C^∞)

$$\begin{array}{ccc} E & & F \\ \pi \downarrow & & \swarrow \rho \\ & M & \end{array}$$

DEF Un'applicazione di fibrati $\varphi: E \rightarrow F$ è un'applicazione tale che
 C^∞ che commuta con π e ρ , cioè il diagramma

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\varphi} & F \\ \pi \downarrow & & \swarrow \rho \\ & M & \end{array}$$

sia commutativo, e tale che per ogni $p \in M$, l'applicazione

$$\pi^{-1}(p) = E_p \xrightarrow{\varphi_p} F_p = \rho^{-1}(p)$$

sia lineare.

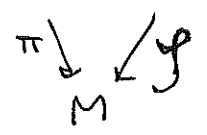
Esempio Sia $\begin{array}{ccc} L & & \\ \pi \downarrow & & \\ \mathbb{P}_k^n & & \end{array}$ il fibrato tautologico, e sia $F = \mathbb{P}_k^n \times k^{n+1}$
 $\begin{array}{ccc} & & \\ \rho \downarrow & & \\ & \mathbb{P}_k^n & \end{array}$

il fibrato banale di rango $n+1$.

Per definizione abbiamo un'applicazione di fibrati

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{\varphi} & F \\ \pi \downarrow & & \swarrow \rho \\ & \mathbb{P}_k^n & \end{array}$$

② Sia $E \xrightarrow{\varphi} F$ un'applicazione di fibrati.

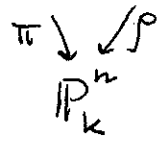


DEF La φ è una iniezione di fibrati se per ogni $p \in M$

l'applicazione lineare $E_p \xrightarrow{\varphi_p} F_p$ è iniettiva.

⊗

Esempio L'applicazione $L \rightarrow F$ dell'esempio precedente



è iniettiva.

Esempio Sia M una varietà C^∞ , e sia $X \subset M$

una sottovarietà C^∞ . Sia $i: X \hookrightarrow M$ l'inclusione.

Per ogni $p \in X$, il differenziale di i in p definisce

una inclusione $di(\varphi): T_p X \hookrightarrow T_p M$ di spazi vettoriali.

Quindi abbiamo un'applicazione di insiemi

$$TX \xrightarrow{\varphi} TM|_X = i^*(TM)$$

e si verifica che φ è C^∞ . Quindi φ è un'applicazione

iniettiva di fibrati vettoriali su X

$$TX \hookrightarrow i^*(TM)$$

Terminologia: Diciamo anche che E è un sottofibrato di F .

③ Ora supponiamo che

$$\varphi: E \hookrightarrow F$$

sia un'applicazione iniettiva di fibrati vettoriali su M .

Allora si definisce un fibrato quoziente

$$\begin{array}{c} F/E \\ \downarrow \\ M \end{array}$$

con fibra F_p/E_p su ogni $p \in M$.

La costruzione di F/E si fa con funzioni di transizione.

Posiamo trovare un ricoprimento aperto

$$M = \bigcup_{\alpha} U_{\alpha}$$

con la proprietà che $E|_{U_{\alpha}}$ e $F|_{U_{\alpha}}$ siano banali, ed

esiste una base $\{f_1^{\alpha}(p), \dots, f_n^{\alpha}(p)\}$ di $F_p \quad \forall p \in U_{\alpha}$ con

la proprietà che $\{f_1^{\alpha}(p), \dots, f_m^{\alpha}(p)\}$ sia una base di E_p

(quindi $\text{rg} F = n$, $\text{rg} E = m$). Con questa scelta, la ~~matrice~~

funzione di transizione $\varphi_{\alpha\beta}(p)$ è a blocchi

$$\varphi_{\alpha\beta}(p) = \begin{array}{c} \left. \begin{array}{c} \overbrace{\hspace{2cm}}^m \\ \left[\begin{array}{c|c} \varphi_{\alpha\beta}(p) & \tau_{\alpha\beta}(p) \\ \hline 0 & \varepsilon_{\alpha\beta}(p) \end{array} \right] \end{array} \right\}^m \\ \left. \begin{array}{c} \underbrace{\hspace{2cm}}_{n-m} \end{array} \right\}^{n-m} \end{array}$$

Allora $\{\varepsilon_{\alpha\beta}(p)\}_{\alpha,\beta}$ è un cociclo, e F/E è definito da questo cociclo.

Esempio Sia M una varietà C^∞ , e $i: X \hookrightarrow M$ una sottovarietà C^∞ .

Il fibrato normale di X in M è il fibrato su X definito da

$$N_{X/M} = i^*(TM)/TX.$$

Esercizio Sia $i: X \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ una sottovarietà, e sia $F \subset X \times \mathbb{R}^n$ definito da

$$F := \{ (p, v) \mid v \perp di(p)(T_p X) \}$$

- Verificare che F è un sottofibrato di $X \times \mathbb{R}^n$.
- Verificare che il fibrato normale di X in \mathbb{R}^n è isomorfo a F .

Il seguente risultato permette di applicare risultati sui fibrati vettoriali allo studio di sottovarietà.

TEOREMA (dell'intorno tubolare).

Siano M una varietà C^∞ e $X \subset M$ una sottovarietà C^∞ .

Esistono un aperto $U \subset M$ contenente X e un diffeomorfismo

$$\varphi: U \xrightarrow{\sim} N_{X/M}$$

talché per ogni $p \in X$ $\varphi(p) \in (N_{X/M})_p$ è il vettore nullo

(informalmente: $\varphi(X)$ è la sezione nulla di $N_{X/M}$.)

Per una dimostrazione si può consultare Guillemin-Dollard "Differential Topology" es. 16 p. 76.

Osservazioni.

(1) Dati $E \xrightarrow{\pi} M$ e $F \xrightarrow{\rho} N$ con banalizzazione di E sugli aperti $\{U_\alpha\}_\alpha$ e banalizzazione di F sugli aperti $\{V_\beta\}_\beta$,
sia E che F si banalizzano sugli aperti $\{U_\alpha \cap V_\beta\}_{\alpha, \beta}$.

(2) Va verificato che, se scelgo banalizzazioni dirette di E (o di F), la classe di isomorfismo del fibrato costruito a partire dalle banalizzazioni non dipende dalle banalizzazioni scelte.

Pull-back di fibrati:

Siano $E \xrightarrow{\pi} N$ un k^n -fibrato, e $f: M \rightarrow N$ un'applicazione C^∞ .

Sia $\Sigma \subset M \times E$ il sottoinsieme

$$\Sigma := \{(m, e) \mid f(m) = \pi(e)\}.$$

e sia $p: \Sigma \rightarrow M$ la restrizione della proiezione.

Si verifica che $p: \Sigma \rightarrow M$ è un k^n -fibrato: infatti

se $\mathcal{N} = \bigcup_\alpha U_\alpha$ è un ricoprimento aperto che banalizza $\pi: E \rightarrow N$,

allora $\mathcal{M} = \bigcup_\alpha f^{-1}U_\alpha$ è un ricoprimento aperto che banalizza $p: \Sigma \rightarrow M$

Notazione: Σ è il pull-back di E (via f) e si denota f^*E

Esempio (I) Sia $\mathbb{P}_k^m \xrightarrow{f} \mathbb{P}_k^n$ una immersione come
 sottospazio proiettivo. Se L_n è il fibrato tangente su \mathbb{P}_k^n ,

$$\begin{array}{c} \pi_n \downarrow \\ \mathbb{P}_k^n \end{array}$$
 si ha

$$f^* L_n \cong L_m. \quad (\text{Il pull-back del tangente è il tangente}).$$

(II) Sia $f: \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$
 $[t_0, t_1] \mapsto [t_0^2, t_0 t_1, t_1^2]$

Allora $f^* L_2 \cong L_1^{\otimes 2}$ (guardate alle funzioni di transizione).

Esercizi: dimostrare che, se $f: M \rightarrow N$ è C^∞ , e

E, F sono fibrati vettoriali su N , allora

$$\begin{array}{ccc} E & & F \\ \downarrow & \swarrow & \downarrow \\ N & & N \end{array}$$

$$f^*(E \oplus F) \cong f^* E \oplus f^* F$$

$$f^*(E \otimes F) \cong f^* E \otimes f^* F$$

$$f^*(E^\vee) \cong f^*(E)^\vee$$

Un risultato importante sul pull-back è il seguente:

PROPOSIZIONE Siano M e N varietà C^∞ , e $f, g: M \rightarrow N$ applicazioni C^∞ omotope. Se E è un fibrato vettoriale/ k ,
$$\begin{array}{c} E \\ \pi \downarrow \\ N \end{array}$$
 allora f^*E è isomorfo a g^*E .

Vedete la dimostrazione sulle pp. 57-58 di Bott-Tu.

Osservate che, a un certo punto, mancano i dettagli (dove?), e che per essere precisi va fatta intervenire una partizione dell'unità.

Duale di Poincaré

(C^∞)

Sia M una varietà di tipo finito, orientabile. Scegliamo una orientazione $[M]$ di M . Per il Teorema di dualità di Poincaré ($n := \dim M$), l'applicazione bilineare

$$\begin{aligned} H_{DR}^p(M) \times H_c^{n-p}(M) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ ([\alpha], [\beta]) &\longmapsto \int_M \alpha \wedge \beta \end{aligned}$$

è una dualità perfetta (perfect pairing)

Ora sia $V \subset M$ una sottovarietà C^∞ orientabile, e sia $[V]$ una orientazione di V . Allora possiamo definire un'applicazione lineare ($d := \dim V$)

$$\begin{aligned} H_c^d(M) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ [\alpha] &\longmapsto \int_V \alpha \end{aligned}$$

Per il Teorema di Poincaré esiste una unica classe $[\eta_V] \in H_{DR}^{n-d}(M)$ tale che

$$\int_V \alpha = \int_M \alpha \wedge \eta_V \quad \forall \alpha \in \Omega_c^d(M) \text{ chiuso}$$

La classe $[\eta_V] \in H_{DR}^{n-d}(M)$ è il duale di Poincaré di V

Studieremo il duale di Poincaré per mezzo del Teorema dell'intorno tubolare.

Esempio M compatta (orientabile), $V = \{p\}$ un punto.

Sia $p \in U \subset M$ un aperto, $U \cong \mathbb{R}^n$, e sia

$\omega \in \Omega_c^n(\mathbb{R}^n)$ tale che

$$\int_{\mathbb{R}^n} \omega = 1$$

(Supponiamo che l'orientazione di $\mathbb{R}^n = U$ sia quella indotta da $[M]$.) Sia $i: U \hookrightarrow M$ l'inclusione. Allora $[i_*\omega] \in H_{DR}^n(M)$,

e

$$[i_*\omega] = \eta_p$$

Coomologia a supporto verticale di un fibrato vettoriale.

Sia $\mathbb{R}^n \rightarrow E$ un \mathbb{R}^n -fibrato.
 $\downarrow \pi$
 M

Sia $\Omega_{cv}^p(E) \subset \Omega_{cv}^p(E)$ il sottospazio vettoriale delle p -forme ω tale che $\left. \text{supp } \omega \right|_{\pi^{-1}(m)}$ ha supporto compatto per ogni $m \in M$.

Se $\omega \in \Omega_{cv}^p(E)$, allora $d\omega \in \Omega_{cv}^{p+1}(E)$, quindi abbiamo un complesso

$$\dots \rightarrow \Omega_{cv}^{p-1}(E) \xrightarrow{d} \Omega_{cv}^p(E) \xrightarrow{d} \Omega_{cv}^{p+1}(E) \xrightarrow{d} \dots$$

la cui coomologia è la coomologia a supporto compatto verticale.

$$H_{cv}^p(E) := \frac{\{\omega \in \Omega_{cv}^p(E) \mid d\omega = 0\}}{\{d\eta \mid \eta \in \Omega_{cv}^{p-1}(E)\}}.$$

DEF Un fibrato vettoriale $\mathbb{R}^n \rightarrow E$ è orientabile se

$$\downarrow \pi$$

$$M$$

esiste un cociclo $\{g_{\alpha\beta}\}$ per E (cioè $M = \bigcup_{\alpha} U_{\alpha}$ è un ricoprimento aperto, $g_{\alpha\beta}: U_{\alpha\beta} \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$ è C^{∞} , e $g_{\alpha\beta} \circ g_{\beta\gamma} = g_{\alpha\gamma}$)

talché $\det g_{\alpha\beta}(p) > 0 \quad \forall p \in U_{\alpha} \cap U_{\beta}$ (e ogni α, β).

Sia $\omega \in \Omega_{cv}^n(E)$, allora si definisce

$$\pi_* \omega \in C^{\infty}(M)$$

così: dato $m \in M$, il valore $\pi_* \omega(m)$ è dato dall'integrale

$$\int_m^+ \omega$$

$$[\mathbb{R}^n]$$

dove $\tilde{z}_m: \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} E_m$ è un isomorfismo

compatibile con il cociclo di orientazione, cioè dato dalle banalizzazioni locali $\{\phi_{\alpha}\}$ con associato cociclo $\{g_{\alpha\beta}\}$.

Più in generale, si definisce

$$\Omega_{cv}^p(E) \xrightarrow{\pi_*} \Omega^{p-n}(M)$$

come segue.

(I) Sia V uno spazio vettoriale su un campo k .

Sia $\alpha \in \wedge^p V^*$, visto come applicazione multilineare alternante

$$\underbrace{V \times \dots \times V}_p \xrightarrow{\alpha} k$$

Dato $v \in V$, la contrazione $v \lrcorner \alpha$ è l'applicazione multilineare alternante

$$\underbrace{V \times \dots \times V}_{p-1} \xrightarrow{v \lrcorner \alpha} k$$

$$(v_1, \dots, v_{p-1}) \mapsto \alpha(v, v_2, v_3, \dots, v_{p-1}).$$

Esempio: $p=1$, cioè $\alpha \in V^*$. Allora $v \lrcorner \alpha = \alpha(v)$.

(II) Sia $\omega \in \Omega_c^p(E)$ con $p \geq n$. Vogliamo definire $\pi_* \omega \in \Omega^{p-n}(M)$. Diamo il valore di $\pi_* \omega$ su $v_1, \dots, v_{p-n} \in T_m M$ (vediamo $\wedge^{p-n} T_m M^v$ come lo spazio delle applicazioni multilineari alternanti

$$\underbrace{T_m M \times \dots \times T_m M}_{p-n} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Il primo passo è definire una n -forma a supporto compatto su E_m . Quindi, sia $e \in E_m$, e siano

$\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_{p-n} \in T_e E$ tali che

$$d\pi(\tilde{v}_i) = v_i$$

Allora $\tilde{v}_1 \wedge \dots \wedge (\tilde{v}_{p-n} \lrcorner \omega) \Big|_e \in \Omega_e^n(E)$.

Questo ~~non~~ elemento di $\Omega_e^n(E)$ dipende dalla scelta di $\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_{p-n}$, ma la sua restrizione a $\Omega_e^n(E_m)$ non dipende dalla scelta di $\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_{p-n}$.

Quindi abbiamo definito

$$\left(\tilde{v}_1 \wedge \dots \wedge \tilde{v}_{p-n} \lrcorner \omega \right) \Big|_{E_m} \in \Omega_e^n(E_m)$$

Ora definiamo

$$\pi_x^* \omega(v_1, \dots, v_{p-n}) = \int_{E_m} \left(\tilde{v}_1 \wedge \dots \wedge \tilde{v}_{p-n} \lrcorner \omega \right) \Big|_{E_m}.$$

Esplicitamente, possiamo supporre che $m \in U$, dove $U \subset M$ è aperto, e $\pi^{-1}U \cong U \times \mathbb{R}^n$. Siano (x_1, \dots, x_d) coordinate su U centrate in m (cioè m ha coordinate $(0, \dots, 0)$), e siano (t_1, \dots, t_n) le coordinate standard su \mathbb{R}^n .

Ogni $\omega \in \Omega^p(\pi^{-1}U)$ è somma di forme del tipo

$$(\text{I}) \quad \alpha = f(x, t) dx^{\mathbb{I}} \wedge dt^{\mathbb{J}} \quad \text{dove } |\mathbb{I}| < n, \text{ e}$$

$$(\text{II}) \quad \beta = f(x, t) dx^{\mathbb{I}} \wedge dt_1 \wedge \dots \wedge dt_n.$$

Si ha che $\left(\begin{matrix} \tilde{v}_1 \wedge \dots \wedge \tilde{v}_{p-n} \wedge \alpha \end{matrix} \right) \Big|_{E_m} = 0$, e quindi

$$\pi_* \alpha = 0.$$

Invece

$$\pi_* \beta = \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x, t) dt_1 \wedge \dots \wedge dt_n \right) dx^{\mathbb{I}}.$$