Esercizi di Geometria Differenziale (Prof. O'Grady) per il 17/10/2016

Sia $A := \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$. Definiamo $\omega \in \Omega^2(A)$ ponendo

$$\omega := \frac{x}{h^3} dy \wedge dz - \frac{y}{h^3} dx \wedge dz + \frac{z}{h^3} dx \wedge dy,$$

dove

$$h(x,y,z) := (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}.$$

Esercizio 1. *Verificate che $d\omega = 0$, e quindi ω rappresenta una classe in $H^2_{DR}(A)$.*

Esercizio 2. *Sia*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{f} & A \\ (\theta, \eta) & \mapsto & (\cos\theta\cos\eta, \cos\theta\sin\eta, \sin\theta) \end{array}$$

Verificate che $f^*(\omega) = \cos\theta d\eta \wedge d\theta$.

Esercizio 3. *Notate che*

$$\int\int_{[-\pi/2,\pi/2]\times[0,2\pi]} f^*(\omega) = -4\pi.$$

A partire da questo, dimostrate che la classe $[\omega] \in H^2_{DR}(A)$ non è nulla.