Esercizi di Geometria Differenziale per il 31/10/2016

Negli esercizi da 1 a 5 sono in vigore le seguenti notazioni:

- V è uno spazio vettoriale sul campo k, di dimensione finita.
- Se V, W sono spazi vettoriali su k, $\mathrm{Hom}(V, W)$ è lo spazio vettoriale delle applicazioni lineari $V \to W$. Denotiamo $V^\vee$ lo spazio vettoriale duale di V, cioè $V^\vee = \mathrm{Hom}(V, k)$.
- $\mathrm{Multlin}(V^m, k)$ è l'insieme delle applicazioni multilineari $V^m \to k$. La somma di applicazioni e la moltiplicazione per un elemento di k dà a $\mathrm{Multlin}(V^m, k)$ una struttura di spazio vettoriale su k.
- $\mathrm{Multlin}^a(V^m, k) \subset \mathrm{Multlin}(V^m, k)$ è il sottospazio vettoriale delle applicazioni multilineari *alternanti* $\Phi\colon V^m \to k$, cioè tali che, per ogni permutazione $\sigma \in \mathcal{S}_m$, si abbia $\Phi(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(m)}) = \mathrm{sign}(\sigma)\Phi(v_1, \ldots, v_m)$. (Qui $\mathrm{sign}(\sigma)$ è il segno della permutazione, cioè 1 se σ è pari, e (-1) se σ è dispari.)

Esercizio 1. *Esiste un'applicazione lineare*

$$\Phi_m\colon \underbrace{V^\vee \otimes \ldots \otimes V^\vee}_{m} \longrightarrow \mathrm{Multlin}(V^m, k) \tag{1}$$

che manda l' elemento decomponibile $f_1 \otimes \ldots \otimes f_m$ *nell'applicazione*

$$\begin{array}{ccc} V^m & \longrightarrow & k \\ (v_1, \ldots, v_m) & \mapsto & f_1(v_1) \cdot f_2(v_2) \cdots f_m(v_m) \end{array} \tag{2}$$

Se si definisce Φ_m *in questo modo, è necessario innanzitutto assicurarsi che l'applicazione sia ben definita (scriviamo un elemento* α *del dominio come somma di tensori decomponibili in due modi diversi, e calcoliamo* $\Phi_m(\alpha)$ *per linearità: chi ci assicura che otteniamo la* stessa *applicazione multilineare?). Per definire* Φ_m *in modo pulito procedete come segue:*

1. *Definite*
$$\Psi_m\colon \underbrace{V^\vee \times \ldots \times V^\vee}_{m} \longrightarrow \mathrm{Multlin}(V^m, k), \tag{3}$$
ponendo $\Psi_m(v_1, \ldots, v_m)$ *uguale all'applicazione in* (6), *e verificate che* Ψ_m *è multilineare.*
2. *Per la proprietà universale del prodotto tensoriale,* Ψ_m *induce un'applicazione lineare* Φ_m*, come in* (5).

Ora dimostrate che Φ_m *è un isomorfismo.*

Esercizio 2. *Date un isomorfismo naturale* $\mathrm{Multlin}(V^m, k) \sim \mathrm{Hom}(V^{\otimes}, k)$*, e concludete che esiste un isomorfismo naturale*

$$\underbrace{V^\vee \otimes \ldots \otimes V^\vee}_{m} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(V^{\otimes}, k). \tag{4}$$

Esercizio 3. *Dimostrate che esiste un'applicazione lineare*

$$\Psi_m\colon \bigwedge^m V^\vee \longrightarrow \mathrm{Multlin}^a(V^m, k) \tag{5}$$

che manda l' elemento decomponibile $f_1 \wedge \ldots \wedge f_m$ *nell'applicazione*

$$\begin{array}{ccc} V^m & \longrightarrow & k \\ (v_1, \ldots, v_m) & \mapsto & \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_m} \mathrm{sign}(\sigma) f_1(v_{\sigma(1)}) \cdots f_m(v_{\sigma(m)}) \end{array} \tag{6}$$

Ora dimostrate che Ψ_m *è un isomorfismo di spazi vettoriali.*

Esercizio 4. *Sia* $n := \dim V$*, e scegliamo un isomorfismo* $\bigwedge^n V \cong k$ *(ricordiamo che* $\dim \bigwedge^n V = 1$*). Dimostrate che se* $0 \le p \le n$*, la moltiplicazione*

$$\begin{array}{ccc} \bigwedge^p V \times \bigwedge^{n-p} V & \longrightarrow & k \\ (\alpha, \beta) & \mapsto & \alpha \wedge \beta \end{array} \tag{7}$$

(ricordate l'identificazione $\bigwedge^n V \cong k$*) definisce un "perfect pairing", cioè le applicazioni indotte*

$$\bigwedge^{p} V \longrightarrow \mathrm{Hom}(\bigwedge^{n-p} V, k), \qquad \bigwedge^{n-p} V \longrightarrow \mathrm{Hom}(\bigwedge^{p} V, k)$$

sono isomorfismi.

Esercizio 5. *Un elemento* $\alpha \in \bigwedge^m V$ *è* decomponibile *se esistono* $v_1, \ldots, v_m \in V$ *tali che* $\alpha = v_1 \wedge \ldots \wedge v_m$*. Per esempio, ogni elemento di* V *è banalmente decomponibile.*

1. *Sia* $n := \dim V$*. Dimostrate che ogni elemento di* $\bigwedge^n V$ *è decomponibile, e similmente che ogni elemento di* $\bigwedge^{n-1} V$ *è decomponibile. (Per la seconda affermazione può essere utile l'es.* 4.*)*

2. *Dimostrate che, se* $\alpha \in \bigwedge^2 V$ *è decomponibile, allora* $\alpha \wedge \alpha = 0$*, e deducetene che se* $\dim V \geq 4$*, allora esistono elemnti non decomponibili di* $\bigwedge^2 V$*.*

Esercizio 6. *Sia* $X \subset \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ *la quadrica*

$$X := \{[x_0, \ldots, x_3] \mid x_0^2 + x_1^2 = x_2^2 + x_3^2\}.$$

Verificate che X *è una sottovarietà* C^∞ *della varietà* $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$*, e che* X *è diffeomorfa a* $S^1 \times S^1$*.*