Esercizi di Geometria Differenziale per il 13/11/2016

Sia ω la 2-forma differenziale su S^2 definita da

$$\omega := (xdy \wedge dz - ydx \wedge dz + zdx \wedge dy)|_{S^2}.$$

Siccome S^2 è una varietà C^∞ di dimensione 2, la 2-forma ω è chiusa, e quindi rappresenta una classe $[\omega] \in H^2_{DR}(S^2)$. Lo scopo degli esercizi (1), (2) e (3) è dimostrare (usando strumenti minimali) che $[\omega] \neq 0$, cioè ω non è esatta, e quindi $H^2_{DR}(S^2) \neq \{0\}$.

Esercizio 1. *Sia*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{f} & S^2 \\ (\theta, \eta) & \mapsto & (\cos\theta\cos\eta, \sin\theta\cos\eta, \sin\eta) \end{array}$$

Verificate che $f^*(\omega) = \cos\eta\, d\theta \wedge d\eta$, *e che quindi*

$$\int\int_{[-\pi,\pi]\times[-\pi/2,\pi/2]} f^*(\omega) = 4\pi. \tag{1}$$

Esercizio 2. *Supponete che* ω *sia esatta. Dimostrate che esistono* $h, g \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, *tali che*

$$f^*\omega = \left(\frac{\partial g}{\partial\theta} - \frac{\partial h}{\partial\eta}\right) d\theta \wedge d\eta, \tag{2}$$

e

1. h *e* g *sono periodiche di periodo* 2π, *cioè per ogni* $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$

$$h(\theta + 2m\pi, \eta + 2n\pi) = h(\theta, \eta), \qquad g(\theta + 2m\pi, \eta + 2n\pi) = g(\theta, \eta).$$

2. *Per ogni* θ *vale* $0 = h(\theta, \pi/2) = h(\theta, -\pi/2)$.

Esercizio 3. *Supponete che* ω *sia esatta. Per* (2) *abbiamo*

$$\begin{aligned}\int\int_{[-\pi,\pi]\times[-\pi/2,\pi/2]} f^*(\omega) &= \int\int_{[-\pi,\pi]\times[-\pi/2,\pi/2]} \left(\frac{\partial g}{\partial\theta} - \frac{\partial h}{\partial\eta}\right) d\theta d\eta = \\ &= \int\int_{[-\pi,\pi]\times[-\pi/2,\pi/2]} \frac{\partial g}{\partial\theta} d\theta d\eta - \int\int_{[-\pi,\pi]\times[-\pi/2,\pi/2]} \frac{\partial h}{\partial\eta} d\theta d\eta = \\ &= \int_{[-\pi/2,\pi/2]} \left(\int_{[-\pi,\pi]} \frac{\partial g}{\partial\theta} d\theta\right) d\eta - \int_{[-\pi,\pi]} \left(\int_{[-\pi/2,\pi/2]} \frac{\partial h}{\partial\eta} d\eta\right) d\theta.\end{aligned}$$

Deducetene, grazie all'esercizio 2, che $\int\int_{[-\pi,\pi]\times[-\pi/2,\pi/2]} f^*(\omega) = 0$. *Confrontando con* (1), *concludete che* ω non *è esatta.*

Esercizio 4. *Generalizzare l'argomento degli esercizi (1), (2), (3) e dimostrare che* $H^n_{DR}(S^n)$ *non è nullo.*

Esercizio 5. *Dimostrare che la retta proiettiva complessa è diffeomorfa a* S^2.