Esercizi di Geometria Differenziale per il 13/11/2016

Esercizio 1. *Sia $C_\bullet$ un complesso limitato (cioè $C_p = \{0\}$ se $|p| \gg 0$) di spazi vettoriali finitamente generati sul campo k:*

$$\ldots \longrightarrow 0 \longrightarrow C_0 \xrightarrow{f_0} C_1 \xrightarrow{f_1} \ldots \xrightarrow{f_{n-1}} C_n \longrightarrow 0 \longrightarrow \ldots$$

(Ricordate che $f_p \circ f_{p-1} = 0$.) Ponete

$$\chi(C_\bullet) := \sum_p (-1)^p \dim C_p.$$

Dimostrate che

$$\chi(C_\bullet) = \sum_p (-1)^p \dim H^p(C_\bullet), \tag{1}$$

dove ricordiamo che

$$H^p(C_\bullet) := \ker f_p / \operatorname{im} f_{p-1}.$$

Notate che da (1) segue che $\chi(C_\bullet) = 0$ se $C_\bullet$ è esatta.

Esercizio 2. *Siano $p_n = [1, 0, \ldots, 0] \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$, e $L_n := \{[x_0, x_1, \ldots, x_n] \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} \mid x_0 = 0\}$, e poniamo*

$$U := (\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} \setminus L_n), \qquad V := (\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} \setminus \{p_n\}).$$

Dimostrate i seguenti risultati:

1. *U è diffeomorfo a $\mathbb{R}^{2n}$.*
2. *L'inclusione $i_n \colon L_n \hookrightarrow V$ induce un isomorfismo $H_{DR}(V) \xrightarrow{\sim} H_{DR}(\mathbb{P}^{n-1}_{\mathbb{C}})$ (notate che $L_n \sim \mathbb{P}^{n-1}_{\mathbb{C}}$.)*

Esercizio 3. *Dimostrate che*

$$H^p_{DR}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } p \text{ è pari, e } p \in \{0, 1, \ldots, 2n\}, \\ \{0\} & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Concludete che se $n \geq 2$, allora $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ non *è diffeomorfo a S^{2n} (notate: entrambe sono varietà C^∞ di dimensione $2n$ compatte.)*

Esercizio 4. *Dimostrate che*

$$H^p_{DR}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } p = 0, \text{ oppure } p = n \text{ e } n \text{ è dispari,} \\ \{0\} & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Esercizio 5. *Sia X una varietà C^∞, e siano*

$$\pi_X \colon X \times S^n \longrightarrow X, \qquad \pi_{S^n} \colon X \times S^n \longrightarrow S^n$$

le proiezioni. Dimostrate che l'applicazione lineare

$$\begin{array}{ccc} H_{DR}(X) \otimes H_{DR}(S^n) & \longrightarrow & H_{DR}(X \times S^n) \\ [\alpha] \otimes [\beta] & \mapsto & [\pi_X^* \alpha \wedge \pi_{S^n}^* \beta] \end{array}$$

è un isomorfismo. (Suggerimento: induzione su n, e ricordate come si è calcolata la coomologia di S^n.) Concludete che se $n \geq 2$ allora $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ non *è diffeomorfo a $\underbrace{\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \times \ldots \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}}_{n}$*