

## Esercizi - Geometria Differenziale

24 NOVEMBRE 2016

**Esercizio 1.** Supponiamo che  $X, Y$  siano varietà  $C^\infty$  di dimensione  $n$  connesse, e che  $\pi: X \rightarrow Y$  sia un rivestimento topologico di grado 2. Sia  $\iota: X \rightarrow X$  l'involuzione di rivestimento, cioè per ogni  $x \in X$  si ha

$$\pi^{-1}(\pi(x)) = \{x, \iota(x)\}.$$

Supponiamo anche che esista una *forma di volume* su  $X$ , cioè  $\omega \in \Omega^n(X)$  mai nulla (quindi  $X$  è orientabile), tale che

$$\iota^*\omega = -\omega.$$

Dimostrate che  $Y$  *non* è orientabile.

**Esercizio 2.** Dimostrate che  $S^n$  è orientabile se e solo se  $n$  è dispari. (Suggerimento: se  $n$  è pari, dimostrate che  $S^n$  non è orientabile usando l'esercizio 1).

**Esercizio 3.** Sia  $\iota: S^1 \times S^1$  l'involuzione definita da

$$\begin{array}{ccc} S^1 \times S^1 & \xrightarrow{\iota} & S^1 \times S^1 \\ ((x_1, x_2), (y_1, y_2)) & \mapsto & ((x_1, -x_2), (-y_1, -y_2)) \end{array}$$

Notate che  $\iota$  non ha punti fissi, e quindi  $Y := S^1 \times S^1 / \langle \iota \rangle$  è in modo naturale una superficie  $C^\infty$ . Dimostrate che  $Y$  *non* è orientabile.