

Esercizi - Geometria Differenziale

24 NOVEMBRE 2016

Esercizio 1. Supponiamo che X, Y siano varietà C^∞ di dimensione n connesse, e che $\pi: X \rightarrow Y$ sia un rivestimento topologico di grado 2. Sia $\iota: X \rightarrow X$ l'involuzione di rivestimento, cioè per ogni $x \in X$ si ha

$$\pi^{-1}(\pi(x)) = \{x, \iota(x)\}.$$

Supponiamo anche che esista una *forma di volume* su X , cioè $\omega \in \Omega^n(X)$ mai nulla (quindi X è orientabile), tale che

$$\iota^*\omega = -\omega.$$

Dimostrate che Y *non* è orientabile.

Esercizio 2. Dimostrate che S^n è orientabile se e solo se n è dispari. (Suggerimento: se n è pari, dimostrate che S^n non è orientabile usando l'esercizio 1).

Esercizio 3. Sia $\iota: S^1 \times S^1$ l'involuzione definita da

$$\begin{array}{ccc} S^1 \times S^1 & \xrightarrow{\iota} & S^1 \times S^1 \\ ((x_1, x_2), (y_1, y_2)) & \mapsto & ((x_1, -x_2), (-y_1, -y_2)) \end{array}$$

Notate che ι non ha punti fissi, e quindi $Y := S^1 \times S^1 / \langle \iota \rangle$ è in modo naturale una superficie C^∞ . Dimostrate che Y *non* è orientabile.