Esercizi - Geometria Differenziale

30 Novembre 2016

Orientabilità

Esercizio 1. Siano X e Y varietà C^∞ orientabili. Dimostrare che $X \times Y$ è orientabile.

Esercizio 2. Siano X e Y varietà C^∞. Dimostrare che se $X \times Y$ è orientabile, allora anche X e Y sono orientabili.

Funzioni olomorfe

Sia $U \subset \mathbb{R}^n$ un aperto. Lo spazio delle m-forme differenziali *complesse* su U è il prodotto tensoriale $\Omega^m(U) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. Una forma $\alpha \in \Omega^m(U) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ ha un'unica espressione come

$$\alpha = \sum_{|J|=m} \alpha_J dx^J, \tag{1}$$

dove $\alpha_J \colon U \to \mathbb{C}$ è una funzione C^∞ a valori complessi, cioè $\alpha_J = \beta_J + i\gamma_J$, dove $\beta_J, \gamma_J \in C^\infty(U)$. Identifichiamo $\mathbb{C}^n$ con $\mathbb{R}^{2n}$ nel modo seguente:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{2n} & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{C}^n \\ (x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n) & \mapsto & (x_1 + iy_1, x_2 + iy_2, \ldots, x_n + iy_n) \end{array}$$

Ora sia $U \subset \mathbb{C}^n$ un aperto. Per quanto detto sopra hanno senso le forme differenziali complesse su U. Poniamo $z_j = x_j + iy_j$. Le 1-forme differenziali complesse $dz_j, d\overline{z}_j \in \Omega^1(U) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ sono definite da

$$dz_j := dx_j + idy_j, \qquad d\overline{z}_j := dx_j - idy_j.$$

(Ovviamente si intende ristrette a U.) Notate che per ogni $a \in U$, una base dello spazio cotangente complessificato $\Omega^1_a(U) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ (base come spazio vettoriale *complesso*) è data da

$$\{dz_1(a), dz_2(a), \ldots, dz_n(a), d\overline{z}_1(a), d\overline{z}_2(a), \ldots, d\overline{z}_n(a)\}. \tag{2}$$

Dati multiindici $J = \{1 \le j_1 < j_2 < \ldots < j_p \le n\}$ e $H = \{1 \le h_1 < h_2 < \ldots < h_q \le n\}$, poniamo

$$dz^J \wedge d\overline{z}^H := dz_{j_1} \wedge dz_{j_2} \wedge \ldots \wedge dz_{j_p} \wedge d\overline{z}_{h_1} \wedge d\overline{z}_{h_2} \wedge \ldots \wedge d\overline{z}_{h_q}.$$

Siccome (2) è una base di $\Omega^1_a(U) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, una base di $\Omega^m_a(U) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ (base come spazio vettoriale *complesso*) è data da

$$\{\ldots, dz^J(a) \wedge d\overline{z}^H(a), \ldots\}_{|J|+|H|=m}.$$

Quindi una forma $\alpha \in \Omega^m(U) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ ha un'unica espressione come

$$\alpha = \sum_{|J|+|H|=m} \alpha_{J,H} dz^J \wedge d\overline{z}^H, \tag{3}$$

dove $\alpha_{J,H} \colon U \to \mathbb{C}$ è una funzione C^∞ a valori complessi. La scrittura (3) è molto più conveniente di quella in (1).

Sia $f \in C^\infty(U)$: si definiscono

$$\frac{\partial f}{\partial z_j} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j} - i\frac{\partial f}{\partial y_j}\right), \qquad \frac{\partial f}{\partial \overline{z}_j} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j} + i\frac{\partial f}{\partial y_j}\right),$$

e

$$\begin{aligned} \partial f &:= \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial z_j} dz_j \\ \overline{\partial} f &:= \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial \overline{z}_j} d\overline{z}_j. \end{aligned}$$

Esercizio 3. Sia $U \subset \mathbb{C}^n$ un aperto. Sia $f \in C^\infty(U)$. Si dimostri che

$$df = \partial f + \overline{\partial} f. \tag{4}$$

Ora sia $\alpha \in \Omega^m(U) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, data da (3). Si definiscono $\partial\alpha$ e $\overline{\partial}\alpha$ così:

$$\begin{aligned} \partial\alpha &:= \sum_{|J|+|H|=m} \partial(\alpha_{J,H}) \wedge dz^J \wedge d\overline{z}^H, \\ \overline{\partial}\alpha &:= \sum_{|J|+|H|=m} \overline{\partial}(\alpha_{J,H}) \wedge dz^J \wedge d\overline{z}^H \end{aligned}$$

Esercizio 4. Sia $U \subset \mathbb{C}^n$ un aperto. Sia $\alpha \in \Omega^m(U) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. Si dimostri che

$$0 = \partial \circ \partial(\alpha) = \overline{\partial} \circ \overline{\partial}(\alpha), \qquad \partial \circ \overline{\partial}(\alpha) = -\overline{\partial} \circ \partial(\alpha). \tag{5}$$

Definizione 1. Sia $U \subset \mathbb{C}^n$ un aperto. Una funzione $f\colon U \to \mathbb{C}$ è *olomorfa* se è C^∞ e $\overline{\partial} f = 0$. Un'applicazione

$$\begin{array}{ccc} U & \overset{\sim}{\longrightarrow} & \mathbb{C}^m \\ z & \mapsto & (f_1(z), f_2(z), \ldots, f_n(z)) \end{array}$$

è *olomorfa* se ciascuna f_i è omolorfa. Analogamente, una funzione $f\colon U \to \mathbb{C}$ è *antiolomorfa* se è C^∞ e $\partial f = 0$. Un'applicazione

$$\begin{array}{ccc} U & \overset{\sim}{\longrightarrow} & \mathbb{C}^m \\ z & \mapsto & (f_1(z), f_2(z), \ldots, f_n(z)) \end{array}$$

è *antiolomorfa* se ciascuna f_i è antiolomorfa.

Esercizio 5. Dimostrare che la composizione di applicazioni olomorfe è olomorfa.

Esercizio 6. Sia $U \subset \mathbb{C}^n$ un aperto, e $f\colon U \to \mathbb{C}$ una funzione C^∞. Dimostrate che

$$\overline{\partial}(\overline{f}) = \overline{(\partial f)}$$

In particolare f è olomorfa se e solo se $\overline{f}$ è antiolomorfa.

Esercizio 7. Sia $U \subset \mathbb{C}^n$ un aperto. Sia $f\colon U \to \mathbb{C}$. Si dimostri che se f è una funzione polinomiale, allora f è olomorfa. Si dimostri più in generale che se f è analitica, allora f è olomorfa.[1] Ricordiamo che f è analitica, se dato $a \in U$, esiste $r > 0$ tale che la palla $B(a, r) \subset U$, e la restrizione di f a $B(a, r)$ ha una espansione come serie di potenze assolutamente convergente.

Esercizio 8. Sia $U \subset \mathbb{C}^n$ un aperto, e $f = (f_1, \ldots, f_n)\colon U \to \mathbb{C}^n$ un'applicazione olomorfa. Sia $a \in U$, e supponiamo che la matrice Jacobiana $Jf(a)$ con entrata $\frac{\partial f_j}{\partial z_h}(a)$ su riga j e colonna h sia invertibile. Dimostrare che f è invertibile in un intorno di a, con inversa (locale) olomorfa.

Esercizio 9. Per $z \in \mathbb{C}$, definiamo $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} z^n/n!$. Dimostrare che e^z è olomorfa in z. Dimostrare che e^z ha inversa locale in ogni punto, chiamiamo l'inversa (ovviamente) $\log z$, e notare che $\log z$ è definita a meno dell'aggiunta di un multiplo intero di $2\pi i$. Concludere che $d(\log z)$ è ben definita nonostante $\log z$ non lo sia, e che

$$d \log z = \partial(\log z) = \frac{dz}{z}.$$

[1] È vero anche il viceversa, ma questa è un'altra storia.