Esercizi - Geometria Differenziale

30 Novembre 2016

Varietà complesse

Sia X una varietà topologica di dimensione n *pari*, e poniamo $n = 2m$. Identifichiamo $\mathbb{R}^n$ con $\mathbb{C}^m$ nel modo standard. Sia $\{(U_j, \varphi_j)\}_{j \in J}$ un atlante su X. Data l'identificazione standard di $\mathbb{R}^n$ con $\mathbb{C}^m$, la carta locale φ_j è un omeomorfismo $\varphi_j \colon U_j \xrightarrow{\sim} V_j$, dove $V_j \subset \mathbb{C}^m$. Diciamo che l'atlante $\{(U_j, \varphi_j)\}_{j \in J}$ è *olomorfo* se le funzioni di transizione sono olomorfe. Sia $f \colon X \to \mathbb{C}$ un'applicazione; siccome la composizione di applicazioni olomorfe è olomorfa, ha senso dichiarare che f è olomorfa se è olorfa in ciascuna carta locale. Analogamente, se Y è un'altra varietà C^∞ con atlante olomorfo, l'applicazione $f \colon X \to Y$ è olomorfa se lo è in coordinate locali. Procedendo come nel caso delle varietà C^∞, si definisce la nozione di varietà complessa. Se X è una varietà complessa con carte locali in $\mathbb{C}^m$, diciamo che la dimensione (complessa) di X è m (notate che la dimensione di X come varietà C^∞ è $2m$).

Esempio 1. $\mathbb{C}^m$ è una varietà complessa, se prendiamo l'atlante banale $\{(\mathbb{C}^m, \mathrm{Id})\}$.

Esempio 2. $\mathbb{P}^m_{\mathbb{C}}$ è una varietà complessa di dimensione m, se prendiamo l'atlante dato dagli aperti affini standard

$$U_j := \{[x] \in \mathbb{P}^m_{\mathbb{C}} \mid x_j \neq 0\},$$

con carta locale

$$\begin{array}{ccc} U_j & \longrightarrow & \mathbb{C}^m \\ [x] & \mapsto & (x_0/x_j, x_1/x_j, \ldots, x_{j-1}/x_j, x_{j+1}/x_j, \ldots, x_m/x_j) \end{array}$$

Esercizio 1. Si dimostri che una varietà complessa è orientabile. (Suggerimento: Siano $U, V \subset \mathbb{C}^m$ aperti non vuoti, e $f \colon U \to V$ un'applicazione olomorfa invertibile. Si dimostri che

$$f^*(i^m dz_1 \wedge d\overline{z}_1 \wedge \ldots \wedge dz_m \wedge d\overline{z}_m) = \rho\, i^m dz_1 \wedge d\overline{z}_1 \wedge \ldots \wedge dz_m \wedge d\overline{z}_m,$$

dove ρ è una funzione *positiva*.)

Esercizio 2. Sia $U \subset \mathbb{C}^m$ un aperto, e $f \colon U \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa tale che

$$\frac{\partial f}{\partial x_m}(a) \neq 0$$

per ogni a tale che $f(a) = 0$. Dimostrare per f l'anologo olomorfo del Teorema di Dini, e cioè che esiste una funzione *olomorfa* $\varphi(z_1, \ldots, z_{m-1})$, definita su un aperto di $\mathbb{C}^{m-1}$, tale che

$$V(f) := \{a \in U \mid f(a) = 0\} = \{(z_1, \ldots, z_{m-1}, \varphi(z_1, \ldots, z_{m-1}))\}.$$

(Suggerimento: invocare l'esercizio 8 del precedento foglio di esercizi.)

Esercizio 3. Sia $F \in \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n]_d$ un polinomio omogeneo di grado d tale che per ogni $a \in (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{(0, \ldots, 0)\})$ valga

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_0}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right) \neq (0, \ldots, 0).$$

Dare a

$$V(F) := \{[a] \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} \mid F(a) = 0\}$$

una struttura di varietà complessa di dimensione $(n-1)$, usando l'esercizio 2 (Teorema di Dini olomorfo).