Esercizi - Geometria Differenziale

14 Dicembre 2016

Esercizio 1. Sia $0 \neq \alpha \in H^2_{DR}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}})$. Siccome $\alpha^{n+1} = 0$, è definito un omomorfismo di anelli (più precisamente $\mathbb{R}$-algebre)

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}[x]/(x^{n+1}) & \xrightarrow{\phi_n} & H_{DR}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}) \\ \sum_i c_i x^i & \mapsto & \sum_i c_i \alpha^i \end{array}$$

Dimostrate che ϕ_n è un *isomorfismo* di anelli. (Suggerimento: procedete per induzione su n. Ricordate che, se $n \geq 2$ e $\mathbb{P}^{n-1}_{\mathbb{C}} \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ è un sottospazio lineare (iperpiano), allora $\alpha|_{\mathbb{P}^{n-1}_{\mathbb{C}}} \neq 0$, e quindi $\alpha^{n-1}|_{\mathbb{P}^{n-1}_{\mathbb{C}}} \neq 0$. Poi invocate la dualità di Poincaré.)

Esercizio 2. Lo scopo del seguente esercizio è di dare un rappresentante esplicito di $H^2_{DR}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}})$. Per $j \in \{0, \dots, n\}$, sia $U_j \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ l'aperto affine standard

$$U_j := \{[x_0, \dots, x_n] \mid x_j \neq 0\},$$

con coordinate affini $(x_0/x_j, \dots, x_{j-1}/x_j, x_{j+1}/x_j, \dots, x_n/x_j)$. Sia η_j la 2-forma complessa su U_j definita da

$$\eta_j := i\partial\overline{\partial} \log \left(\sum_{k=0}^{n} \left| \frac{x_k}{x_j} \right| \right).$$

(1) Verificate che η_j è una 2-forma *reale* su U_j.
(2) Verificate che, se $j, s \in \{0, \dots, n\}$, allora $\eta_j|_{U_j \cap U_s} = \eta_s|_{U_j \cap U_s}$, e quindi esiste una 2-forma reale η tale che $\eta|_{U_j} = \eta_j$.
(3) Verificate che $d\eta = 0$, e quindi $[\eta] \in H^2_{DR}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}})$. Dimostrate che $[\eta] \neq 0$. (Suggerimento: considerate il caso $n = 1$.)

Esercizio 3. Sia $M_{n,n}(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale reale delle matrici reali $n \times n$, e sia $O_n(\mathbb{R}) \subset M_{n,n}(\mathbb{R})$ il gruppo delle matrici ortogonali, cioè tali che $A^t \cdot A = 1_n$. Dimostrate che $O_n(\mathbb{R})$ è una sottovarietà C^∞ di $M_{n,n}(\mathbb{R})$, e quindi è un gruppo C^∞. (Suggerimento: prima verificate che $O_n(\mathbb{R})$ è una sottovarietà in un intorno della matrice unità 1_n, e poi concludete per "omogeneità".)

Esercizio 4. Siano M una varietà C^∞ di tipo finito, e $E \to M$ un fibrato lineare complesso (cioè un fibrato vettoriale complesso di rango 1). Sia $\sigma_0 \colon M \to E$ la sezione nulla.

(1) Dimostrate che, se E è banale, allora $H^1_{DR}(E \setminus \mathrm{Im}(\sigma_0)) \neq 0$. (Suggerimento: ricordate la formula di Künneth.)
(2) Sia $n > 0$. Dimostrate che il fibrato lineare tautologico[1] su $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ *non* è banale.

[1] Ricordiamo che il fibrato tautologico $E \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}^{n+1}$ è definito da $E := \{(\ell, v) \mid v \in \ell\}$, con applicazione $E \to \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ uguale alla restrizione della proiezione.