Esercizi di IGS (Prof. O'Grady) per il 10/12/2018

Esercizio 1. Siano $f_1, \ldots, f_r \in \mathbb{C}[z_1, z_2]$ tali che

$$\gcd\{f_1, \ldots, f_r\} = 1.$$

(Ricordate che $\mathbb{C}[z_1, z_2]$ è un UFD.) Dimostrate che $V(f_1, \ldots, f_r) \subset \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ è un insieme finito.

Esercizio 2. Sia $X \subset \mathbb{A}^2$ un chiuso proprio ($X \neq \mathbb{A}^2$ e $X \neq \emptyset$) irriducibile. Dimostrate che X o è un punto o è una ipersuperfice irriducibile.

Esercizio 3. Sia $M_{2,2}(\mathbb{C})$ lo spazio vettoriale complesso delle matrici 2×2 complesse. Siano $n > 0$, e $U_n \subset M_{2,2}(\mathbb{C})$ il sottoinsieme delle matrici T tali che $T^n = 1$, dove $1 \in M_{2,2}(\mathbb{C})$ è la matrice unità).

1. Dimostrate che U_n è Zariski chiuso in $M_{2,2}(\mathbb{C})$.

2. Descrivete le componenti irreducibili di U_n, e dimostrate che sono $\binom{n+1}{2}$.

Esercizio 4. Siano $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ un vettore colonna $n \times 1$ con entrate in $\mathbb{C}$, e $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. L'applicazione affine invertibile

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} & \longrightarrow & \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} \\ z & \mapsto & A \cdot z + B \end{array}$$

(z è il vettore colonna $n \times 1$ con entrate $z_1, \ldots, z_n$) è un automorfismo di $\mathbb{A}^n$.

1. Dimostrate che *ogni* automorfismo della varietà affine $\mathbb{A}^1$ è del tipo definito sopra.

2. Sia $n \geq 2$. Dimostrate che, se $f \in \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_{n-1}]$, allora

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A}^n & \xrightarrow{\Phi_f} & \mathbb{A}^n \\ z & \mapsto & (z_1, \ldots, z_{n-1}, z_n + f(z_1, \ldots, z_{n-1}) \end{array} \tag{1}$$

   è un automorfismo della varietà affine $\mathbb{A}^n$. Dimostrate che Φ_f è un'applicazione affine se e solo se $\deg f \leq 1$.

Esercizio 5. Siano $n \geq 2$, e $U := \mathbb{A}^n \backslash \{(0, \ldots, 0)\}$. Dimostrate che l'applicazione di restrizione

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n] & \longrightarrow & \mathbb{C}[U] \\ f & \mapsto & f_{|U} \end{array}$$

è un isomomorfismo. Concludere che U *non* è una varietà affine. (Ricordo, per contrasto, che $\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$ *è* una varietà affine.