Esercizi di IGS (Prof. O'Grady) per il 7/1/2019

Esercizio 1. Siano X e Y varietà quasi proiettive.

1. Dimostrate che se X e Y sono irriducibili, allora $X \times Y$ è irriducibile. (Suggerimento: osservate che, se $C \subset (X \times Y)$ è chiuso, allora
$$\{x \in X \mid \{x\} \times Y \subset C\} = \bigcap_{y \in Y} \{x \in X \mid (x, y) \in C\},$$
e quindi è chiuso.)

2. Dimostrate che, se $\{X_i\}_{i \in I}$ sono le componenti irriducibili di X, e $\{Y_j\}_{j \in J}$ sono le component irriducibili di Y, allora $\{X_i \times Y_j\}_{(i,j) \in I \times J}$ sono le componenti irriducibili di $X \times Y$.

3. Dimostrate che la dimensione di $X \times Y$ è $\dim X + \dim Y$. (Riducetevi al caso in cui X e Y sono varietà affini irriducibili.)

Esercizio 2. Ricordiamo che, se V è uno spazio vettoriale complesso di dimensione finita, la Grassmanniana dei sottospazi di V di dimensione h è

$$\mathrm{Gr}\,(h, V) := \{W \subset V \mid \dim W = h\} = \{\Lambda \subset \mathbb{P}(V) \mid \Lambda \text{ sottospazio lineare di dimensione } h - 1\}.$$

Quindi $Gr\,(1, V) = \mathbb{P}(V)$ e abbiamo l'identificazione

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}(V^\vee) & \longrightarrow & \mathrm{Gr}\,(\dim V - 1, V) \\ [\varphi] & \mapsto & \ker \varphi \end{array}$$

In generale, $\mathrm{Gr}\,(h, V)$ si può identificare con una varietà proiettiva, come segue. L' *applicazione di Plücker* è

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Gr}(h, V) & \xrightarrow{\mathcal{P}} & \mathbb{P}(\bigwedge^h V) \\ W & \mapsto & \bigwedge^h W \end{array}$$

Si dimostra che $\mathcal{P}$ è iniettiva, e che la sua immagine è un chiuso irriducibile di $\mathbb{P}(\bigwedge^h V)$. In questo esercizio ci limitiamo al primo caso non banale, cioè $\dim V = 4$ e $h = 2$. *Da ora in poi V_4 è uno spazio vettoriale complesso di dimensione 4.*

1. Dimostrate che, se $V = V_4$ e $h = 2$, l'applicazione di Plücker $\mathcal{P}$ è iniettiva, e che la sua immagine è la quadrica
$$\mathsf{Q} := \{[\alpha] \in \mathbb{P}(\bigwedge^2 V_4) \mid \alpha \wedge \alpha = 0\}.$$
Scelta una base $\{v_0, \ldots, v_3\}$ di V_4, descrivete esplicitamente $\mathcal{P}$, e verificate che nella base $\{u_{ij}\}_{0 \leq i < j \leq 3}$ di $\bigwedge^2 V_4^\vee$ duale della base $\{v_i \wedge v_j\}_{0 \leq i < j \leq 3}$, si ha
$$\mathsf{Q} = V(u_{01}u_{23} - u_{02}u_{13} + u_{03}u_{12}).$$
Quindi $\mathcal{P}$ identifica l'insieme delle rette in $\mathbb{P}^3$ con l'insieme dei punti di una quadrica non degenere.

2. L'applicazione $\mathcal{P}$ identifica $\mathrm{Gr}(2, V_4)$ con una quadrica, e quindi da ora in poi $\mathrm{Gr}(2, V_4)$ è una varietà proiettiva. In particolare $\mathrm{Gr}(2, V_4)$ è dotata di una topologia di Zariski. Sia $U_2 \subset V_4$ un sottospazio di dimensione 2, e sia

$$\mathrm{Gr}(2, V_4)_{U_2} := \{W \in \mathrm{Gr}(2, V_4) \mid W \cap U_2 = \{0\}\}.$$

Notate che

$$\mathrm{Gr}(2, V_4) = \bigcup_{U \in \mathrm{Gr}(2,V)} \mathrm{Gr}(2, V_4)_U. \tag{1}$$

Dimostrate che, per $U \subset V_4$ un sottospazio di dimensione 2, $\mathrm{Gr}(2, V_4)_U$ è un aperto di $\mathrm{Gr}(h, V)$ isomorfo a $\mathbb{A}^4$.

Esercizio 3. Denotiamo con $\mathbf{Gr}(1, \mathbb{P}^3)$ l'insieme delle rette di $\mathbb{P}^3$. Quindi $\mathbf{Gr}(1, \mathbb{P}^3)$ è identificato con la grassmanniana $\mathrm{Gr}(2, \mathbb{C}^4)$, e perciò è una varietà proiettiva (di dimensione 4). Sia $X \subset \mathbb{P}^3$ una ipersuperficie. L'insieme delle rette in X, cioè

$$F(X) := \{R \subset X \mid R \text{ retta}\}$$

è un sottoinsieme di $\mathbf{Gr}(1, \mathbb{P}^3)$. Dimostrate che $F(X)$ è un chiuso, e quindi è una varietà proiettiva.

Esercizio 4. Con la notazione dell'esercizio precedente, descrivete $F(X)$ se $X \subset \mathbb{P}^3$ è una quadrica non degenere.