Esercizi di IGS (Prof. O'Grady) per il 14/1/2019

Esercizio 1. Siano X e Y varietà quasi proiettive. Dimostrate che se X e Y sono liscie, allora $X \times Y$ è liscia. (Suggerimento: prima dimostratelo per X e Y spazi proiettivi.)

Esercizio 2. Siano $a, b \in \mathbb{N}_+$, e $\mathsf{M}(a, b)$ lo spazio vettoriale (complesso) delle matrici $a \times b$ a entrate complesse. Siano $r \leq \min\{a, b\}$, e $\mathsf{D}_r(a, b) \subset \mathsf{M}(a, b)$ il sottonsieme delle matric di rango al più r. Notate che $\mathsf{D}_r(a, b)$ è un chiuso di Zariski, e quindi è una varietà affine. Sia $A \in \mathsf{D}_r(a, b)$, e supponiamo che il rango di A sia uguale a r. Dimostrate che $\mathsf{D}_r(a, b)$ è liscia in A. (Se $r = \min\{a, b\}$, allora $\mathsf{D}_r(a, b) = \mathsf{M}(a, b)$, e quindi $\mathsf{D}_r(a, b)$ è liscia in ogni punto. Se $r < \min\{a, b\}$, allora $\mathsf{D}_r(a, b)$ è liscia in A *solo* se il rango di A è r, ma questo è più difficile da dimostrare.)

Esercizio 3. Si dimostra che una (iper)superficie cubica[1] liscia in $\mathbb{P}^3$ contiene esattamente 27 rette. Riuscite a dare un esempio di (iper)superficie cubica in $\mathbb{P}^3$ per cui sapete elencare le 27 rette?

[1] Una ipersuperficie $X \subset \mathbb{P}^n$ ha grado d se $I(X)$ è generato da un polinomio di grado d. Una ipersuperficie cubica è una ipersuperficie di grado 3.