Esercizi di Istituzioni di Geometria Superiore (Prof. O'Grady) per il 1/10/2018

Esercizio 1. *Dimostrate* a mano *che* $H^1_{DR}(\mathbb{R}^n) = 0$ *e* $H^n_{DR}(\mathbb{R}^n) = 0$.

Esercizio 2. *Definiamo* $\omega_{n-1} \in \Omega^{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{(0,\ldots,0)\})$ *ponendo*

$$\omega_{n-1} := \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \frac{x_i}{||x||^n} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{i-1} \wedge \widehat{dx_i} \wedge dx_{i+1} \wedge \cdots \wedge dx_n. \tag{1}$$

(Il "cappello" su dx_i significa che dx_i non appare.) Verificate che $d\omega_{n-1} = 0$, e quindi ω_{n-1} rappresenta una classe in $H^{n-1}_{DR}(\mathbb{R}^n \setminus \{(0,\ldots,0)\})$.

Esercizio 3. *Sia $\omega_1 \in \Omega^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,\ldots,0)\})$ come nell'esercizio precedente. Dimostrate che* ω_1 non *è esatta, e quindi la sua classe in $H^1_{DR}(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,\ldots,0)\})$ non è nulla. (Suggerimento: calcolate l'integrale curvilineo di ω_1 su un opportuno cammino chiuso.)*

Esercizio 4. *Sia*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{f} & (\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,\ldots,0)\}) \\ (\theta, \eta) & \mapsto & (\cos\theta\cos\eta, \cos\theta\sin\eta, \sin\theta) \end{array}$$

1. *Verificate che* $f^*(\omega_2) = \cos\theta d\theta \wedge d\eta$.

2. *Notate che*

$$\int\int_{[-\pi/2,\pi/2]\times[0,2\pi]} f^*(\omega_2) = 4\pi.$$

   A partire da questo, dimostrate che la classe $[\omega_2] \in H^2_{DR}(\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,\ldots,0)\})$ non è nulla.