Esercizi di Istituzioni di Geometria Superiore (Prof. O'Grady) per il 15/10/2018

Esercizio 1. Un gruppo G è un *gruppo di Lie* se è una varietà C^∞, e le applicazioni

$$\begin{array}{ccc} G\times G & \longrightarrow & G \\ (g_1,g_2) & \mapsto & g_1\cdot g_2 \end{array}, \qquad \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G \\ g & \mapsto & g^{-1} \end{array}$$

sono C^∞. Per esempio, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ e $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ sono gruppi di Lie. Dato $g\in G$ sia $L_g\colon G\to G$ l'applicazione $L_g(x):=g\cdot x$ (moltiplicazione a sinistra per g). Notate che $L_{gh}=L_g\circ L_h$, e che L_g è C^∞, e che $L_g(1)=g$. In particolare il differenziale $L_g(1)$ è un'applicazione lineare $T_1G\to T_gG$, invertibile perchè $L_g^{-1}\circ L_g=L_1=\mathrm{Id}_G$. Dato $v\in T_1G$ definiamo $\tilde v(g)\in T_gG$ così:

$$\tilde v(g):=dL_g(1)(v).$$

Dimostrate che $\tilde v$ è una sezione C^∞ del fibrato tangente. Da ciò deducete che G è *parallelizzabile*, cioè il suo fibrato tangente è *banale*.

Esercizio 2. Sia $M_{n,n}(\mathbb{C})$ lo spazio vettoriale complesso delle matrici complesse $n\times n$. Siano $\mathrm{U}(n),\mathrm{SU}(n)\subset M_{n,n}(\mathbb{C})$ i gruppi delle matrici unitarie per la forma hermitiana standard[1], e unitarie di determinante 1 rispettivamente. Dimostrate che $\mathrm{U}(n),\mathrm{SU}(n)$ sono sottovarietà C^∞, e che quindi sono gruppi di Lie. Dimostrate che $\mathrm{U}(n)$ e $\mathrm{SU}(n)$ sono connessi, e che $\mathrm{SU}(2)$ è diffeomorfo a S^3. Deducete da ciò che S^3 è parallelizzabile.

Esercizio 3. Per l'esercizio precedente sappiamo che $S^3\subset\mathbb{R}^4$ è parallelizzabile. Date esplicitamente tre campi vettoriali tangenti immersi V_1,V_2,V_3 su S^3 tali che $\{V_1(x),V_1(x),V_1(x)\}$ sia una base dello spazio tangente a S^3 in x per ogni $x\in S^3$.

Esercizio 4. Dimostrate che $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ è diffeomorfo a $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$.

Esercizio 5. Sia $T_{S^2}\subset\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3$ lo spazio totale dello spazio tangente immerso di S^2, cioè

$$T_{S^2}=\{(x,y)\mid ||x||=1,\quad (x,y)=0\}.$$

Sia

$$\mathcal{S}(T_{S^2}):=\{(x,y)\mid ||x||=||y||=1,\quad (x,y)=0\}.$$

Dimostrate che $\mathcal{S}(T_{S^2})$ è diffeomorfo a $\mathrm{SO}(3)$, e deducetene per l'esercizio 4 che S^2 non ha campi vettoriali tangenti non nulli.

Esercizio 6. Su $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ sia $\{(U,\varphi),(V,\psi)\}$ l'atlante standard, cioe'

$$U:=(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\setminus\{[0,1]\}),\ V:=(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\setminus\{[1,0]\}),\ \varphi([w,z]]):=z/w,\ \varphi([w,z]]):=w/z. \tag{1}$$

(Identifichiamo $\mathbb{R}^2$ con $\mathbb{C}$ via $(x,y)\mapsto(x+iy)$.) Siano ω_U,ω_V le 2-forme differenziali su U e V definite da

$$\omega_U:=\frac{1}{(1+x^2+y^2)^2}dx\wedge dy,\quad \omega_V:=\frac{1}{(1+s^2+t^2)^2}ds\wedge dt.$$

(Identifichiamo U e V con $\mathbb{C}$ via (1).) Dimostrate che esiste (una unica) 2-forma differenziale ω su $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ tale che

$$\omega|_U=\omega_U,\quad \omega|_V=\omega_V.$$

[1] Definita da $\langle X,Y\rangle=X^t\cdot\overline{Y}$ per matrici colonna $X,Y\in M_{n,1}(\mathbb{C})$.

Esercizio 7. Dimostrate che la coomologia di De Rham di $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ è data da

$$H^p_{DR}(\mathbb{P}^n(\mathbb{C})) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } p \text{ è pari e } 0 \leq p \leq 2n, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

(Suggerimento: applicate Mayer-Vietoris al ricoprimento aperto

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) = \mathbb{P}^n(\mathbb{C})_{X_0} \cup (\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \setminus \{[1, 0, \ldots, 0]\}).$$