Esercizi di Istituzioni di Geometria Superiore (Prof. O'Grady) per il 29/10/2018

Sia M una varietà C^∞ con coomologia di De Rham finitamente generata: la sua caratteristica di Eulero è

$$\chi(M) := \sum_p (-1)^p b_p(M) = \sum_p (-1)^p \dim H^p_{DR}(M).$$

Per esempio

$$\chi(S^n) := 1 + (-1)^n.$$

Esercizio 1. Sia

$$\dots \xrightarrow{d} C^{p-1} \xrightarrow{d} C^p \xrightarrow{d} C^{p+1} \xrightarrow{d} \dots$$

un complesso *esatto* finito ($C^m = 0$ per $m \ll 0$ e per $m \gg 0$) di spazi vettoriali finitamente generati su un campo k. Dimostrate che

$$\sum_p (-1)^p \dim_k C^p = 0.$$

Esercizio 2. Sia M una varietà C^∞, e siano $U, V \subset M$ aperti la cui unione è M. Dimostrate che se tre tra M, U, V e $U \cap V$ hanno coomologia di De Rham finitamente generata, allora anche il rimanente ha coomologia finitamente generata.

Esercizio 3. Sia M una varietà C^∞ di dimensione n con coomologia finitamente generata, e $p \in M$. Dimostrate che $M \setminus \{p\}$ ha coomologia finitamente generata, e che

$$\chi(M \setminus \{p\}) = \chi(M) + (-1)^{n-1}.$$

Esercizio 4. Siano M, N varietà C^∞ connesse di dimensione n, entrambe con coomologia finitamente generata, e sia $M \sharp N$ la loro somma connessa. Dimostrate che

$$\chi(M \sharp N) = \chi(M) + \chi(N) - (1 + (-1)^n).$$

Esercizio 5. Siano M, N varietà C^∞, entrambe con coomologia finitamente generata. Dimostrate che

$$\chi(M \times N) = \chi(M) \cdot \chi(N).$$

Esercizio 6. Sia $\widetilde{M} \to M$ un rivestimento topologico di varietà C^∞, di grado finito uguale a d. Supponiamo che M sia di tipo finito. Dimostrate che $\widetilde{M}$ è di tipo finito, e che

$$\chi(\widetilde{M}) = d \cdot \chi(M).$$