Esercizi di Istituzioni di Geometria Superiore (Prof. O'Grady) per il 3/12/2018

Esercizio 1. Sia $A = (a_{jk})_{(j,k)\in\{0,\ldots,n\}}$ una matrice $(n+1)\times(n+1)$ *simmetrica*, e sia $Q_A(Z) := Z^t \cdot A \cdot Z$ l'associata forma quadratica su $\mathbb{C}^{n+1}$. Se $A \neq 0$, allora

$$V(Q_A) = \{[Z] \in \mathbb{P}^n \mid Q_A(Z) = 0\}$$

è una ipersuperficie in $\mathbb{P}^n$.

1. Verificate che
$$V(\frac{\partial Q_A}{\partial Z_0}, \ldots, \frac{\partial Q_A}{\partial Z_n}) = \emptyset$$
se e solo se A è non degenere. Quindi, se A è non degenere, $V(Q_A)$ è una sottovarietà complessa di $\mathbb{P}^n$, e perciò è una varietà complessa di dimensione n.

2. Supponete che A sia non degenere. Dimostrate che $V(Q_A)$ è una varietà complessa connessa.

3. Siano $n = 2$ e A non degenere, cioè $V(Q_A)$ è una conica complessa non degenere. Dimostrate che $V(Q_A)$ è isomorfa (come varietà complessa) a $\mathbb{P}^1$.

4. Siano $n = 3$ e A non degenere, cioè $V(Q_A)$ è una quadrica complessa non degenere. È vero che $V(Q_A)$ è isomorfa (come varietà complessa) a $\mathbb{P}^2$?

Esercizio 2. Sia $V \subset \mathbb{P}(\mathbb{C}[Z_0, \ldots, Z_n]_d)$ definito da

$$V := \{[L^d] \mid 0 \neq L \in \mathbb{C}[Z_0, \ldots, Z_n]_1\}.$$

1. Dimostrate che $[F] \in V$ se e solo se

   $\frac{\partial F}{\partial Z_0}, \ldots, \frac{\partial F}{\partial Z_0}$ generano un sottospazio vettoriale di $\mathbb{C}[Z_0, \ldots, Z_n]$ di dimensione 1.

   [*Suggerimento.* Procedere per induzione su $\deg F$. Usate l'identità di Eulero
$$\sum_{i=0}^{n} Z_i \frac{\partial F}{\partial Z_i} = (\deg F) \cdot F,$$
   valida per F polinomio omogeneo.]

2. Dedurre che V è chiuso in $\mathbb{P}(\mathbb{C}[Z_0, \ldots, Z_n]_d)$.