Geometria (Fisica, Canale A-C),

Prof. K. O'Grady

Soluzioni della prova di esame del 7 Febbraio 2017

Esercizio 1. Siano $U, V \subset \mathbb{R}^4$ i sottospazi vettoriali definiti da

$$\begin{aligned} U &:= \langle (1,1,-7,5),\ (1,0,-4,3),\ (1,-3,5,-3) \rangle, \\ V &:= \{X \in \mathbb{R}^4 \mid 0 = x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4\}. \end{aligned}$$

1. Date basi di U e V.

2. Determinate se U e V sono isomorfi.

Risoluzione: (1): Riducendo a scala per righe la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -7 & 5 \\ 1 & 0 & -4 & 3 \\ 1 & -3 & 5 & -3 \end{bmatrix},$$

che ha per righe le entrate dei generatori di U, otteniamo la matrice a scale per righe

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -7 & 5 \\ 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Quindi una base di U è data da

$$\{(1,1,-7,5),\ (1,-3,2)\}.$$

Risolvendo il sistema di equazioni lineari omogenee che definisce V, otteniamo la base di V data da

$$\{(2,5,0,-3),\ (5,2,-3,0)\}.$$

(2): Per (1) la dimensione di U è 2, e la dimensione di V è 2. Siccome U e V hanno la stessa dimensione, sono isomorfi.

Esercizio 2. Sia

$$A := \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \in M_{3,3}(\mathbb{R}),$$

e supponiamo che $\operatorname{Det} A = 5$. Sia $B \in M_{3,3}(\mathbb{R})$ definita da

$$B := \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} + a_{13} & a_{12} \\ a_{21} - 3a_{11} & a_{22} + a_{23} - 3a_{12} - 3a_{13} & a_{22} - 3a_{12} \\ a_{31} & a_{32} + a_{33} & a_{32} \end{bmatrix}.$$

Calcolate $\operatorname{Det} B$.

Risoluzione: Con una serie di operazioni elementari su righe e colonne di B, si arriva alla matrice A. Esplicitamente, sottraendo alla 2^a colonna di B la sua 3^a colonna, si ottiene che

$$\operatorname{Det} B = \operatorname{Det} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{21} - 3a_{11} & a_{23} - 3a_{13} & a_{22} - 3a_{12} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} \end{bmatrix}.$$

Aggiungendo alla 2^a riga della matrice sopra la sua 1^a riga moltiplicata per 3, otteniamo che

$$\operatorname{Det} B = \operatorname{Det} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} \end{bmatrix}.$$

Scambiando le ultime due colonne della matrice sopra, vediamo che

$$\operatorname{Det} B = -\operatorname{Det} A = -5.$$

Esercizio 3. Sia $\mathbb{A}^2$ il piano affine euclideo e siano dati i punti $P_1 = (1,0)$, $P_2 = (-1,1)$, $P_3 = (1,2)$ e $P_1' = (0,2)$, $P_2' = (1,0)$, $P_3' = (2,2)$.

(a) Scrivere, nella forma $f(X) = A \cdot X + b$, un'affinità $f\colon \mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^2$ tale che $f(P_i) = P_i'$ per $i = 1,2,3$.

(b) Dire se l'affinità f è una isometria (per la distanza euclidea standard).

Risoluzione: (a): Si ha

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(b): Sì, perchè la matrice è ortogonale.

Esercizio 4. Sia $A \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ data da

$$A := \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Determinate una matrice $P \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ invertibile, e una matrice $D \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ diagonale tali che

$$A = P \cdot D \cdot P^{-1}.$$

Risoluzione: Il polinomio caratteristico di A è

$$P_A(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 6,$$

che ha radici $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = -2$. Una base che diagonalizza A è data da $\{v_1, v_2\}$ dove v_1, v_2 sono autovettori corrispondenti, cioè

$$v_1 = (1,-1), \qquad v_2 = (2,3).$$

Quindi

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Esercizio 5. Siano

$$A := \begin{bmatrix} 18 & 0 & -6 \\ 0 & 12 & 6 \\ -6 & 6 & 5 \end{bmatrix},$$

e $q(X) := X^t \cdot A \cdot X$ l'associata forma quadratica su $\mathbb{R}^3$. Determinate una base ortogonormale (per il prodotto euclideo standard) che diagonalizza q.

Risoluzione: Il polinomio caratteristico di A è

$$P_A(\lambda) = \lambda(\lambda^2 - 35\lambda + 294),$$

e quindi gli autovalori di A sono

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 14, \quad \lambda_3 = 21,$$

ciascuno con molteplicità 1. Autovettori di A corrispondenti sono

$$v_1 := (2, -3, 6), \quad v_2 := (3, 6, 2), \quad v_3 = (6, -2, -3).$$

Quindi $\{v_1, v_2, v_3)$ è una base ortogonale che diagonalizza q. Normalizzando, otteniamo la base ortonormale

$$\mathcal{B} := \{(2/7, -3/7, 6/7),\ (3/7, 6/7, 2/7),\ (6/7, -2/7, -3/7)\}.$$

che diagonalizza f.