Geometria (Fisica, Canale A-C),

Prof. K. O'Grady

Soluzioni della prova di esame del 28 Febbraio 2017

Esercizio 1. Siano $v_1, v_2, v_3, w_1, w_2 \in \mathbb{R}^4$ i vettori definiti da

$$\begin{aligned} v_1 &= (1, 2, -1, 0), \\ v_2 &= (4, 2, 1, 1), \\ v_3 &= (2, -2, 3, 1), \\ w_1 &= (5, 4, 0, 1), \\ w_2 &= (-1, 4, -4, -1). \end{aligned}$$

Stabilite se i due sottospazi $V = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ e $W = \langle w_1, w_2 \rangle$ di $\mathbb{R}^4$ sono uguali oppure no (fornendo adeguata motivazione).

Risoluzione: Dimostriamo che $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle = \langle w_1, w_2 \rangle$. Iniziamo verificando che $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle \subset \langle w_1, w_2 \rangle$. Si tratta di trovare $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tali che il vettore

$$\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 = (5\lambda_1 - \lambda_2,\ 4\lambda_1 + 4\lambda_2,\ -4\lambda_2,\ \lambda_1 - \lambda_2) \tag{1}$$

sia uguale a v_i per $i \in \{1, 2, 3\}$. Con facili calcoli si trova che

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{1}{4} w_1 + \frac{1}{4} w_2, \\ v_2 &= \frac{3}{4} w_1 - \frac{1}{4} w_2, \\ v_3 &= \frac{1}{4} w_1 - \frac{3}{4} w_2. \end{aligned}$$

Questo dimostra che $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ è contenuto in $\langle w_1, w_2 \rangle$. È facile verificare che v_1, v_2 sono linearmente indipendenti, quindi $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ ha dimensione almeno 2, ed essendo contenuto in $\langle w_1, w_2 \rangle$, che ha dimensione al più 2 (di fatto ha dimensione è uguale a 2, perchè, come si vede facilmente dalla (1), i vettori w_1, w_2 sono linearmente indipendenti) è necessariamente uguale a $\langle w_1, w_2 \rangle$.

Esercizio 2. Per $t \in \mathbb{R}$, siano $v_1(t), v_2(t), w(t) \in \mathbb{R}^3$ i vettori definiti da

$$\begin{aligned} v_1(t) &= (1 - t, 1 + t, 1 - 2t), \\ v_2(t) &= (2 + t, -1, -2 + 3t), \\ w(t) &= (3 - 2t, t, -1). \end{aligned}$$

(a) Determinate per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ i vettori $v_1(t)$ e $v_2(t)$ sono linearmente indipendenti.

(b) Determinate per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ il vettore $w(t)$ appartiene al sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato da $v_1(t)$ e $v_2(t)$.

Risoluzione: (a): Se $v_1(t), v_2(t)$ sono linearmente dipendenti, allora anche i vettori

$$(1 - t, 1 + t), \quad (2 + t, -1),$$

ottenuti proiettandoli sul sottospazio $x_3 = 0$ sono linearmente dipendenti, cioè

$$\text{Det} \begin{bmatrix} 1 - t & 1 + t \\ 2 + t & -1 \end{bmatrix} = 0. \tag{2}$$

Un facile calcolo dà che il determinante in (2) è uguale a $-(t^2 + 2t + 3)$. Siccome il discriminante di $t^2 + 2t + 3$ è negativo, l'equazione $t^2 + 2t + 3 = 0$ non ha soluzioni reali, e questo dimostra che $v_1(t), v_2(t)$ sono linearmente indipendenti per *ogni* $t \in \mathbb{R}$.

(b): Siccome $v_1(t), v_2(t)$ sono linearmente indipendenti per ogni $t \in \mathbb{R}$, il vettore $w(t)$ appartiene a $\langle v_1(t), v_2(t) \rangle$ se e solo se è nullo il determinante della matrice 3×3 con righe le entrate di $v_1(t)$, $v_2(t)$ e $w(t)$, cioè se e solo se

$$\mathrm{Det} \begin{bmatrix} 1-t & 1+t & 1-2t \\ 2+t & -1 & -2+3t \\ 3-2t & t & -1 \end{bmatrix} = 0. \tag{3}$$

Siccome il determinante della matrice in (3) è uguale a $-5t^3 + 4t^2 + 5t$, il vettore $w(t)$ appartiene a $\langle v_1(t), v_2(t) \rangle$ se e solo se

$$t(5t^2 - 4t - 5) = 0,$$

cioè

$$t \in \{0, \frac{2+\sqrt{29}}{5}, \frac{2-\sqrt{29}}{5}\}.$$

Esercizio 3. Siano A, B le matrici reali 2×2 definite da

$$A := \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \qquad B := \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}.$$

(a) Stabilite se A, B sono diagonalizzabili.

(b) Stabilite se A e B sono coniugate l'una all'altra.

Risoluzione: I polinomi caratteristici di A e B sono uguali, e valgono $\lambda^2 - 5\lambda + 6$. Quindi sia A che B hanno due autovalori reali distinti, cioè $\lambda = 2$ e $\lambda = 3$. Segue che sia A che B sono diagonalizzabili, e che sono coniugate alla matrice diagonale

$$C := \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Quindi A è coniugata a C, e C è coniugata a B. Siccome la relazione di coniugio è transitiva, A è coniugata a B.

Esercizio 4. Determinate rango e segnatura della forma quadratica su $\mathbb{R}^{2n+1}$ definita da

$$f(x_1, \ldots, x_{2n+1}) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_{2i-1}x_{2i} \right) + x_{2n+1}^2 = x_1x_2 + x_3x_4 + \ldots + x_{2n-1}x_{2n} + x_{2n+1}^2.$$

Risoluzione: Siano $y_1, \ldots, y_{2n+1}$ le coordinate su $\mathbb{R}^{2n+1}$ determinate da

$$\begin{aligned} x_{2i-1} &= y_{2i-1} + y_{2i} \quad (1 \le i \le n) \\ x_{2i} &= y_{2i-1} - y_{2i} \quad (1 \le i \le n) \\ x_{2n+1} &= y_{2n+1}, \end{aligned}$$

cioè date da

$$\begin{aligned} y_{2i-1} &= (x_{2i-1} + x_{2i})/2 \quad (1 \le i \le n) \\ y_{2i} &= (x_{2i-1} - x_{2i})/2 \quad (1 \le i \le n) \\ y_{2n+1} &= x_{2n+1}. \end{aligned}$$

Nelle coordinate $y_1, \ldots, y_{2n+1}$ la forma quadratica è diagonale, data da

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (y_{2i-1}^2 - y_{2i}^2) \right) + y_{2n+1}^2,$$

e quindi il suo rango è $2n + 1$ (cioè è non degenere), e la sua segnatura è 1.

Esercizio 5. Sia $M_{n,n}(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale reale delle matrici reali quadrate $n\times n$ e sia T l'endomorfismo

$$\begin{array}{ccc} M_{n,n}(\mathbb{R}) & \xrightarrow{T} & M_{n,n}(\mathbb{R}) \\ A & \mapsto & A^t \end{array}$$

(a) Determinate autovalori e autospazi di T.

(b) Stabilite se T è diagonalizzabile.

Risoluzione: Se A è una matrice simmetrica, allora $T(A) = A$, quindi se A è non è nulla è un autovettore con autovalore uguale a 1. D'altra parte se A è una matrice antisimmetrica, allora $T(A) = -A$, quindi se A non è nulla è un autovettore con autovalore uguale a -1. Quindi 1 e -1 sono autovalori di T, *a meno* che $n \in \{0, 1\}$; nel primo caso non c'è nulla da dire, se $n = 1$ evidentemente l'unico autovalore è 1, e T è diagonalizzabile. Dimostriamo che per $n \geq 2$

1. T è diagonalizzabile,
2. gli unici autovalori sono $1, -1$, e
3. gli autospazi sono rispettivamente $M^+_{n,n}(\mathbb{R})$ (il sottospazio delle matrici simmetriche) e $M^-_{n,n}(\mathbb{R})$ (il sottospazio delle matrici antisimmetriche).

(1), (2) e (3) seguono da ciò che è stato già detto, e dalla decomposizione in somma diretta

$$M_{n,n}(\mathbb{R}) = M^+_{n,n}(\mathbb{R}) \oplus M^-_{n,n}(\mathbb{R}).$$

(È chiaro che $M^+_{n,n}(\mathbb{R}) \cap M^-_{n,n}(\mathbb{R}) = \{0\}$, e, data $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ si ha $A = (A + A^t)/2 + (A - A^t)/2$, con $(A + A^t)/2 \in M^+_{n,n}(\mathbb{R})$, e $(A - A^t)/2 \in M^-_{n,n}(\mathbb{R})$.)