Geometria (Fisica, Canale A-C),

Proff. A. De Sole, G. Mondello, K. O'Grady, P. Papi

Soluzioni della prova di esame del 30 Giugno 2017

Esercizio 1. Sia $W \subset \mathbb{R}^3$ il sottospazio generato dai vettori

$$(1,1,-2), \qquad (1,0,-1), \qquad (2,-3,1).$$

Per $t \in \mathbb{R}$, sia

$$v_t := (2,3,-1) + t(1,2,3).$$

Determinare quali v_t sono tali che

$$\langle W, v_t \rangle \neq \mathbb{R}^3.$$

Risoluzione: Il sottospazio W ha equazione cartesiana

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0. \tag{1}$$

In particolare, siccome $\dim W = 2$, vale $\langle W, v_t \rangle \neq \mathbb{R}^3$ se e solo se $v_t \in W$. Per la (1), si ha $v_t \in W$ se e solo se

$$(2+t) + (3+2t) + (-1+3t) = 0,$$

cioè $t = -2/3$. Quindi $\langle W, v_t \rangle \neq \mathbb{R}^3$ se e solo se

$$v_t = (4/3, 5/3, -3).$$

Esercizio 2. Siano $\mathbb{K}$ un campo, e V, W spazi vettoriali su $\mathbb{K}$. Siano $f \colon V \to W$ un'applicazione, e

$$\Gamma := \{(v, f(v)) \mid v \in V\} \subset V \oplus W$$

il grafo di f. Si dimostri che f è lineare se e solo se Γ è un sottospazio vettoriale di $V \oplus W$.

Risoluzione: Supponiamo che f sia lineare, e verifichiamo che Γ è un sottospazio vettoriale di $V \oplus W$. Siccome f è lineare $f(0) = 0$, e quindi $(0,0) \in \Gamma$. Ora siano $(v_1, f(v_1)), (v_2, f(v_2)) \in \Gamma$. Siccome f è lineare, $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$, cioè

$$(v_1, f(v_1)) + (v_2, f(v_2)) = (v_1 + v_2, f(v_1) + f(v_2)) = (v_1 + v_2, f(v_1 + v_2)) \in \Gamma.$$

Qundi Γ è chiuso per la somma. Analogamente, dati $\lambda \in \mathbb{K}$ e $(v, f(v)) \in \Gamma$ si ha $f(\lambda v) = \lambda f(v)$ perchè f è lineare, cioè

$$\lambda(v, f(v)) = (\lambda v, \lambda f(v)) = (v, f(\lambda v)) \in \Gamma.$$

Qundi Γ è anche chiuso per il prodotto per scalari, e perciò è un sottospazio vettoriale di $V \oplus W$. La dimostrazione del viceversa, cioè che se Γ è è un sottospazio vettoriale di $V \oplus W$, allora f è lineare è analoga; si percorre la stessa strada a ritroso.

Esercizio 3. Sia $\mathbb{A}^2$ il piano affine reale, e siano $L_1, L_2, L_3, M_1, M_2, M_3 \subset \mathbb{A}^2$ le rette di equazioni cartesiane

$$L_1 : 2x_1 + 3x_2 = 5, \quad L_2 : x_1 - x_2 = 0, \quad L_3 : x_1 + 2x_2 = 3, \quad M_1 : x_1 = 3, \quad M_2 : 2x_1 - x_2 = 1, \quad M_3 : x_1 + x_2 = 4.$$

Esiste o non esiste un'affinità $\phi \colon \mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^2$ tale che $\phi(L_i) = M_i$? (Suggerimento: disegnate le rette in questione).

Risoluzione: Non esiste un'affinità $\phi\colon \mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^2$ tale che $\phi(L_i) = M_i$ perchè
$$L_1 \cap L_2 \cap L_3 = \{(1,1)\}, \qquad M_1 \cap M_2 \cap M_3 = \emptyset.$$

Esercizio 4. Sia $q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma quadratica definita da
$$q(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 - 4x_2x_3.$$

1. Si determini una base ortogonale (non necessariamente ortonormale) rispetto al prodotto scalare standard, in cui la q è diagonale.
2. Si determinino il massimo M e il minimo m di q sulla sfera unitaria, cioè
$$M := \max\{q(x) \mid ||x|| = 1\}, \qquad m := \min\{q(x) \mid ||x|| = 1\}.$$

Risoluzione: (1): La matrice associata a q è
$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$
Il polinomio caratteristico di A è
$$P_A = \lambda^3 - 5\lambda^2 - 2\lambda + 6.$$
Le radici del polinomio caratteristico, cioè gli autovalori di A, sono
$$\lambda = 1, \quad \lambda = 2 + \sqrt{10}, \quad \lambda = 2 - \sqrt{10},$$
con autovettori associati
$$v_1 = (2,-2,1), \quad v_2 = (\sqrt{10}, 2+\sqrt{10}, -4), \quad v_3 = (-\sqrt{10}, 2-\sqrt{10}, -4)$$
rispettivamente. Quindi una base ortogonale in cui la q è diagonale è
$$\mathcal{B} := \{(2,-2,1),\ (\sqrt{10}, 2+\sqrt{10}, -4),\ (-\sqrt{10}, 2-\sqrt{10}, -4)\}.$$
(2): Esiste una base *ortonormale* $\mathcal{C} = \{w_1, w_2, w_3\}$ (per esempio ottenuta normalizzando i vettori di $\mathcal{B}$) tale che
$$f(y_1w_1 + y_2w_2 + y_3w_3) = y_1^2 + (2+\sqrt{10})y_2^2 + (2-\sqrt{10})y_3^2. \tag{2}$$
Come sappiamo, il massimo M e il minimo m vengono raggiunti da autovettori dell'endomorfismo associato (calcolate il gradiente della funzione di y in (2)), cioè vettori della base $\mathcal{C}$. Calcolando f, è chiaro che $M = 2 + \sqrt{10}$, e $m = 2 - \sqrt{10}$.

Esercizio 5. Sia V uno spazio vettoriale, e $p\colon V \to V$ un'applicazione lineare tale che
$$p \circ p = p.$$

1. Dimostrate che $V = \ker p \oplus \operatorname{im} p$.
2. Dimostrate che, se V è finitamente generato, allora esiste una base $\mathcal{B}$ di V tale che $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(p)$ è una matrice diagonale con entrate sulla diagonale principale appartenenti a $\{0,1\}$.

Risoluzione: Per dimostrare che $V = \ker p \oplus \operatorname{im} p$, dobbiamo verificare che

(a) $\ker p + \operatorname{im} p = V$, e

(b) $\ker p \cap \operatorname{im} p = \emptyset$.

Sia $v \in V$. Allora
$$v = (v - p(v)) + p(v),$$
e $(v - p(v)) \in \ker p$ perchè $p(v - p(v)) = p(v) - p \circ p(v) = p(v) - p(v) = 0$. Siccome $p(v) \in \operatorname{im} p$, abbiamo dimostrato che vale (a). Ora supponimao che $v \in \ker p \cap \operatorname{im} p$. In particolare esiste $w \in V$ tale che $v = p(w)$. Quindi
$$0 = p(v) = p(p(w)) = p \circ p(w) = p(w),$$
cioè $v = 0$.