Geometria (Fisica),

Proff. A. De Sole, G. Mondello, K. O'Grady, P. Papi

Soluzioni della prova di esame del 13 luglio 2017

Esercizio 1. Stabilire quali tra le seguenti funzioni sono applicazioni lineari tra spazi vettoriali:

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1$;

(b) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(x, y) = 3x - \pi y$;

(c) $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $h(x, y) = x + y + xy$.

(d) $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $p(x, y) = (\frac{6xy^2+6x+y^3+y}{y^2+1}, y)$.

Risoluzione: (a): $f(0) = 1 \neq 0$, e quindi f *non è lineare.* (b): g *è lineare.* (c): Siccome $h(1, 1) = 3$ e $h(2, 2) = 8$, non vale $h(2, 2) = 2h(1, 1)$, e quindi h *non è lineare.* (d): Siccome $p(x, y) = (6x + y, y)$, p *è lineare.*

Esercizio 2. Sia $W \subset \mathbb{R}^5$ il sottospazio lineare $W := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5 \;\middle|\; \begin{array}{l} x_1 - x_2 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \\ x_5 = 0 \end{array} \right\}$.

(a) Determinare una base $\mathcal{B}$ di W.

(b) Determinare una base $\mathcal{C}$ dello spazio vettoriale quoziente $\mathbb{R}^5/W$.

Risoluzione: (a): Una base $\mathcal{B}$ di W è $\mathcal{B} := \{(1, 1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, -1, 0)\}$. (b): Una base del quoziente $\mathbb{R}^5/W$ si ottiene completando $\mathcal{B}$ a una base

$$\{(1, 1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, -1, 0), v_1, v_2, v_3\}$$

di $\mathbb{R}^5$, e ponendo $\mathcal{C} := \{[v_1], [v_2], [v_3]\}$. Per esempio, possiamo scegliere

$$\mathcal{C} = \{[(1, -1, 0, 0, 0)], [(0, 0, 1, 1, 0)], [(0, 0, 0, 0, 1)]\}.$$

Esercizio 3. Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B(X, Y) := X^t \cdot A \cdot Y$ la corrispondente forma bilineare simmetrica su $\mathbb{R}^2$ e sia $\langle\cdot,\cdot\rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^2$. Costruire, se esiste, un'isometria $f : (\mathbb{R}^2, B) \to (\mathbb{R}^2, \langle\cdot,\cdot\rangle)$.

Risoluzione: Una tale isometria esiste perchè la forma bilineare simmetrica B è definita positiva. Per definire una isometria f, è sufficiente produrre una base ON $\{v_1, v_2\}$ di $(\mathbb{R}^2, B)$, e porre $f(y_1v_1 + y_2v_2) := (y_1, y_2)$. Una base ON per B è $\{(1, 0), (1, -1)\}$. Quindi una tale isometria è data da

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^2, B) & \xrightarrow{f} & (\mathbb{R}^2, \langle,\rangle) \\ (x_1, x_2) & \mapsto & (x_1 + x_2, -x_2) \end{array}$$

Esercizio 4. Sia $M \in \mathcal{M}_{5\times 5}(\mathbb{R})$ una matrice di rango 4, e sia $T_M : \mathcal{M}_{5\times 5}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{5\times 5}(\mathbb{R})$ l'applicazione lineare data da

$$T_M(A) := A \cdot M.$$

Determinare il rango di T_M.

Risoluzione: Esistono basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ di $\mathbb{R}^5$ tali che

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(L_M) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(L_{A\cdot M}) = M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}(L_A) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

e perciò il rango di T_M è uguale al rango dell'endomorfismo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{5\times 5}(\mathbb{R}) & \xrightarrow{\phi} & \mathcal{M}_{5\times 5}(\mathbb{R}) \\ C & \mapsto & C \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{array}$$

Siccome

$$\operatorname{im} \phi = \{(a_{ij}) \in \mathcal{M}_{5\times 5}(\mathbb{R}) \mid a_{i5} = 0\},$$

il *rango di* T_M *è uguale a* 20.

Esercizio 5. Sia $L_M : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo associato alla matrice

$$M := \begin{pmatrix} 5 & -10 & -8 \\ -10 & 2 & -2 \\ -8 & -2 & 8+t \end{pmatrix}$$

dipendente dal parametro $t \in \mathbb{R}$.

(a) Determinare per quali t il vettore $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ sia un autovettore di L_M e calcolarne l'autovalore associato.

(b) Al variare del parametro t, determinare rango e segnatura della forma bilineare simmetrica associata a M. *[Suggerimento: può essere di aiuto calcolare* $\det(M)$*].*

Risoluzione: (a):

$$M \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 \\ -18 \\ -12+t \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

dà che $\lambda = -9$ e $t = 3$. (b):

$$\operatorname{Det} M = \begin{vmatrix} 5 & -10 & -8 \\ 0 & -18 & -18 \\ -8 & -2 & 8+t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 0 & -8 \\ 0 & -18 & -18 \\ -8 & -18 & 8+t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 0 & -8 \\ 0 & -18 & -18 \\ -8 & 0 & 26+t \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 5 & 0 & -8 \\ 0 & -18 & 0 \\ -8 & 0 & 26+t \end{vmatrix} = -18(66+55t).$$

Quindi il rango è massimo, cioè 3, se $t \neq -66/5$. D'altra parte, se $t = -66/5$ il rango è 2 perchè le prime due colonne di M sono linearmente indipendenti. Per determinare la segnatura di M calcoliamo i determinanti dei minori

$$(5), \quad \begin{pmatrix} 5 & -10 \\ -10 & 2 \end{pmatrix}, \quad M$$

di M. Troviamo i valori

$$5, \quad -90, \quad -18(66+55t).$$

Esaminando i cambiamenti di segno, scopriamo che

$$\text{segnatura di } M = \begin{cases} 1 & \text{se } -66/5 < t, \\ -1 & \text{se } t < -66/5, \\ 0 & \text{se } t = -66/5. \end{cases}$$